Řešení úloh krajského kola 56. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E

Autoři úloh: J. Thomas (1, 3), L. Ledvina (2),
Ľ. Konrád (4; úloha převzata z FO SR)

1. FO56E3–1: Inlajnisté

a) Adam projede delší okruh za 2 min = 120 s, Barbora kratší okruh za 400 m/5 m/s = 80 s. Poprvé se tedy potkají po 240 s. Adam přitom ujede 2 kola (vzdálenost 2·1 000 m = 2 000 m), Barbora 3 kola (vzdálenost 3·400 m = 1 200 m).

2 body

b) Adam ujede kratší dráhu za 120 s · 400 m/1 000 m = 48 s. Barbora ujede delší kolo za 1 000 m/5 m/s = 200 s. Nejmenší společný násobek těchto časů pak bude 1 200 s; závodníci se poprvé potkají po 1 200 s a Adam ujede 25 kol (vzdálenost 25 · 400 m = 10 000 m), Barbora 6 kol (vzdálenost 6 · 1 000 m = 6 000 m).

2 body

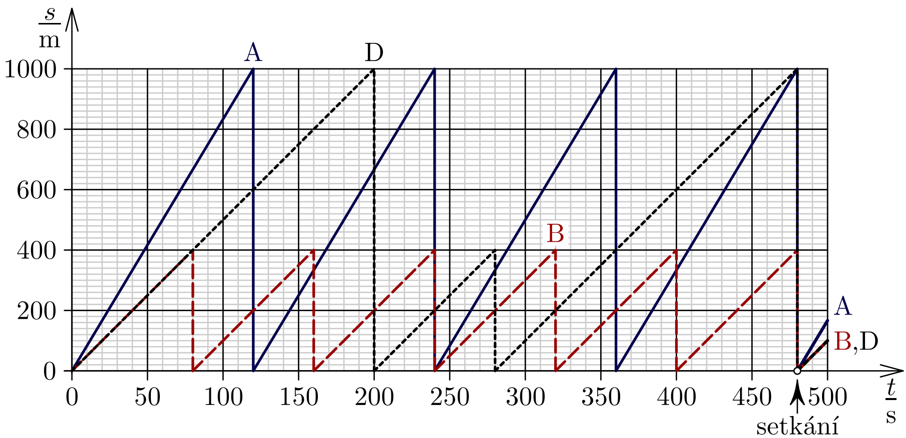
c) K řešení využijeme tabulku, kde zaznamenáme časy průjezdů všech tří přátel místem startu. Daniel ujede delší okruh za 3 min 20 s = 200 s, kratší okruh ujede za 200 s · 400 m/1 000 m = 80 s, tj. za stejný čas jako Barbora.

	časy po projetí okruhů v sekundách					
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
A	120	240	360	480	600	720
B	80	160	240	320	400	480
D	200	280	480	560	760	840

Všichni tři potkají u startu po 480 s. Adam ujede 4 kola a vzdálenost 4 · 1 000 s = = 4 000 m, Barbora 6 kol a vzdálenost 6 · 400 m = 2 400 m a Daniel 2 delší a jedno kratší kolo, tj. vzdálenost 2 · 1 000 m + 400 m = 2 400 m (stejnou jako Barbora).

3 body

d) Na základě hodnot v tabulce sestrojíme graf (viz obr. 1). **3 body**



Obr. 1: Graf pohybu inlajnistů

2. FO56E3–2: Tlak u dna nádoby

a) Tlak na dně bude součtem atmosférického tlaku p_a a hydrostatického tlaku kapaliny v nádobě. Pro tlak na dně trubice proto platí

$$p_1 = p_\mathrm{a} + h\varrho_\mathrm{v}g = 100\,000\,\mathrm{Pa} + 1\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 110\,000\,\mathrm{Pa} = 110\,\mathrm{kPa}.$$

2 body

b) Podobně při naplnění válce rtutí o hustotě $\varrho_\mathrm{Hg} = 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}$ získáme

$$p_2 = p_\mathrm{a} + h\varrho_\mathrm{Hg}g = 100\,000\,\mathrm{Pa} + 1\,\mathrm{m}\cdot 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 235\,000\,\mathrm{Pa} = 235\,\mathrm{kPa}.$$

2 body

c) Označme plochu dna nádoby S. Pro hmotnosti vody m_v a rtuti m_Hg v nádobě a jejich objemy V_v, V_Hg platí

$$m_\mathrm{v} = V_\mathrm{v}\varrho_\mathrm{v}; \qquad m_\mathrm{Hg} = V_\mathrm{Hg}\varrho_\mathrm{Hg}.$$

Podle zadání $m_\mathrm{v} = m_\mathrm{Hg}$, pro objemy a výšky, které zaplní rtuť a voda platí

$$\frac{V_\mathrm{v}}{V_\mathrm{Hg}} = \frac{Sh_\mathrm{v}}{Sh_\mathrm{Hg}} = \frac{h_\mathrm{v}}{h_\mathrm{Hg}} = \frac{\varrho_\mathrm{Hg}}{\varrho_\mathrm{v}} = 13{,}5.$$

a zároveň $h_\mathrm{v} + h_\mathrm{Hg} = h = 1\,\mathrm{m}$. **2 body**

Odtud pro výšky vody a rtuti získáváme

$$h_\mathrm{v} = h\frac{\varrho_\mathrm{Hg}}{\varrho_\mathrm{v} + \varrho_\mathrm{Hg}} = 1\,\mathrm{m}\cdot\frac{13\,500\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} + 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}931\,\mathrm{m},$$

$$h_\mathrm{Hg} = h - h_\mathrm{v} = h\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{v} + \varrho_\mathrm{Hg}} = 1\,\mathrm{m}\cdot\frac{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} + 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}069\,\mathrm{m}.$$

1 bod

Pro tlak u dna nádoby pak vychází

$$\begin{aligned} p &= p_\mathrm{a} + (h_\mathrm{v}\varrho_\mathrm{v} + h_\mathrm{Hg}\varrho_\mathrm{Hg})\,g = \\ &= 100\,000\,\mathrm{Pa} + \left(0{,}931\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} + 0{,}069\,\mathrm{m}\cdot 13\,500\,\mathrm{kg/m^3}\right)\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = \\ &= 118\,620\,\mathrm{Pa} \doteq 119\,\mathrm{kPa}. \end{aligned}$$

1 bod

d) V tabulkách najdeme hustotu např. smrkového dřeva $\varrho_\mathrm{d} = 650\,\mathrm{kg/m^3}$ (ze zkušenosti víme, že hustota většiny druhů dřeva je menší než hustota vody) a oceli $\varrho_\mathrm{o} = 7\,850\,\mathrm{kg/m^3}$. Dřevěná kulička bude plavat na hladině vody (díky menší hustotě, bude voda v horní části nádoby a rtuť ve spodní) a ocelová na hladině mezi vodou a rtutí. Množství vody odpovídající objemu kuličky pod hladinou vody přitom z nádoby vyteče. **2 body**

Poznámka k hodnocení: Pokud řešitelé zapomenou započítat atmosférický tlak vzduchu, ale výpočet hydrostatického tlaku zvládnou bez chyby, měla by jim být započítána část bodového zisku, v části a) a b) vždy 1 bod a v části c) pokud správně určí poměr výšek a hydrostatické tlaky 3 body.

3. FO56E3-3: Drátěný čtverec

a) Odpor jedné strany čtverce bude $R = 2{,}4\,\Omega$. Připojíme-li zdroj k bodům A a B, bude odpor části EFCD mezi body E a F

$$\frac{1}{R_{\mathrm{EF}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{2R}, \qquad R_{\mathrm{EF}} = \frac{2}{3}R$$

a celkový odpor mezi body AB

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{2}{3}R + R} = \frac{1}{R} + \frac{3}{5R} = \frac{8}{5R}, \qquad R_{\mathrm{AB}} = \frac{5}{8}R = 1{,}5\,\Omega. \qquad \textbf{2 body}$$

Přívodními vodiči pak prochází proud $I = U/R_{\mathrm{AB}} = 4{,}5\,\mathrm{V}/1{,}5\,\Omega = 3\,\mathrm{A}$ a ve všech vodičích se za čas $t = 1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$ uvolní celkem teplo

$$Q = R_{\mathrm{AB}}I^2t = \frac{U^2}{R_{\mathrm{AB}}}t = \frac{(4{,}5\,\mathrm{V})^2}{1{,}5\,\Omega} \cdot 60\,\mathrm{s} = 810\,\mathrm{J}. \qquad \textbf{2 body}$$

Nejprve určíme proud mezi body A a E. Celkový proud I se dělí v opačném poměru vzhledem k odporům

$$\frac{I_{\mathrm{AB}}}{I_{\mathrm{AE}}} = \frac{R_{\mathrm{AE}}}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{R_{\mathrm{EF}} + R}{R} = \frac{\frac{2}{3}R + R}{R} = \frac{5}{3}; \qquad \Longrightarrow \qquad I_{\mathrm{AB}} = \frac{5}{3}I_{\mathrm{AE}}.$$

Protože současně také $I_{\mathrm{AE}} + I_{\mathrm{AB}} = 8I_{\mathrm{AE}}/3 = 3\,\mathrm{A}$ je vychází $I_{\mathrm{AE}} = 3 \cdot 3/8\,\mathrm{A} = 1{,}125\,\mathrm{A}$. Tento proud se dále větví a platí

$$I_{\mathrm{EF}} + I_{\mathrm{EDCF}} = 1{,}125\,\mathrm{A}, \qquad \frac{I_{\mathrm{EDCF}}}{I_{\mathrm{EF}}} = \frac{R_{\mathrm{EF}}}{R_{\mathrm{EDCF}}} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

Odtud dostáváme

$$I_{\mathrm{EF}} + \frac{1}{2}I_{\mathrm{EF}} = \frac{3}{2}I_{\mathrm{EF}} = 1{,}125\,\mathrm{A}, \qquad I_{\mathrm{EF}} = \frac{2}{3} \cdot 1{,}125\,\mathrm{A} = 0{,}75\,\mathrm{A}. \qquad \textbf{3 body}$$

b) Při připojení zdroje k bodům A a D nebude vzhledem k symetrii obvodu mezi body E a F procházet žádný proud $I_{\mathrm{EF}} = 0\,\mathrm{A}$. **1 bod**
Pro celkový odpor zapojení R_{AD} bude platit

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AD}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} = \frac{4}{3R}, \qquad R_{\mathrm{AD}} = \frac{3}{4}R = 1{,}8\,\Omega.$$

Přívodními vodiči pak prochází proud $I = U/R_{\mathrm{AD}} = 4{,}5\,\mathrm{V}/1{,}8\,\Omega = 2{,}5\,\mathrm{A}$ a ve všech vodičích se za čas $t = 60\,\mathrm{s}$ uvolní celkem teplo

$$Q = R_{\mathrm{AD}} I^2 t = \frac{U^2}{R_{\mathrm{AD}}} t = \frac{(4{,}5\,\mathrm{V})^2}{1{,}8\,\Omega} \cdot 60\,\mathrm{s} = 675\,\mathrm{J}.$$ **2 body**

4. FO56E3-4: Ohřívání vody na kamnech

a) Abychom vodu o hmotnosti m_1 přivedli za čas τ_1 do varu, musíme jí dodat teplo

$$Q_1 = m_1 c\,(t_2 - t_1) = \tau_1 P, \tag{1}$$

kde c je měrná tepelná kapacita vody, t_1 je teplota vody ve vědru, $t_2 = 100\,°\mathrm{C}$ je teplota varu vody, P je tepelný výkon dodávaný kamny.
I vodu o hmotnosti m_2 později přilitou do hrnce je potřeba ohřát z teploty t_1 na teplotu varu vody t_2; pro potřebné teplo, jež musíme dodat za čas τ_2, platí

$$Q_2 = m_2 c\,(t_2 - t_1) = \tau_2 P. \tag{2}$$

Podělením rovnic (1) a (2) dostaneme poměr hmotností

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$ **4 body**

b) Podle kalorimetrické rovnice pro pokles teploty Δt po dolití studené vody platí

$$m_1 c \Delta t = m_2 c\,(t_2 - \Delta t - t_1)\,,$$ **2 body**

odkud dostáváme poměr

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{t_2 - \Delta t - t_1}{\Delta t}.$$ **2 body**

Odtud pak získáme hledanou teplotu vody ve vědru

$$t_1 = t_2 - \Delta t \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = 100\,°\mathrm{C} - 12\,°\mathrm{C} \cdot \left(1 + \frac{24\,\mathrm{min}}{4\,\mathrm{min}}\right) = 16\,°\mathrm{C}.$$

2 body