Řešení praktické úlohy celostátního kola 57. ročníku fyzikální olympiády

Neideální elektrický obvod

Autorka úlohy: Jana Trojková

Úkol 1 (2 body)

Konstanta přístroje udává hodnotu jednoho dílku při daném měřícím rozsahu.

$$K = \frac{\text{měřicí rozsah}}{\text{celkový počet dílků na stupnici}} = \frac{2,4\,\mathrm{mA}}{120} = 0,02\,\mathrm{mA}.$$

Relativní odchylka je z definice při třídě přesnosti 1 rovna 1% z rozsahu a tedy i maximální hodnoty, avšak už 2% z hodnoty odpovídající polovině rozsahu a 4% z hodnoty čtvrtinové (pro druhý použitý typ ampérmetru je třída přesnosti 0,5 a všechny hodnoty odchylek poloviční).

Úkol 2 (8 bodů)

Rozbor řešení

Můžeme uvažovat různé varianty zapojení a)-e) jako na obrázku 1. Pro přehlednější zápis označme $R_\mathrm{A} + R_\mathrm{Z} = R_\mathrm{i}$. Získáme tak rovnice

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad \varepsilon &= I_0 R_\mathrm{i},\\
\text{b)}\quad \varepsilon &= I_1 (R_\mathrm{i} + R_1),\\
\text{c)}\quad \varepsilon &= I_2 (R_\mathrm{i} + R_2),\\
\text{d)}\quad \varepsilon &= I_\mathrm{P}\left(R_\mathrm{i} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right),\\
\text{e)}\quad \varepsilon &= I_\mathrm{S}(R_\mathrm{i} + R_1 + R_2),
\end{aligned}$$

kde I_0 je proud při připojení pouze ampérmetru (schéma a), I_1 proud při připojení ampérmetru a rezistoru R_1 (schéma b), I_2 proud při připojení ampérmetru a rezistoru R_2 (schéma c), I_P je proud při připojení ampérmetru a obou rezistorů spojených paralelně (schéma d) a I_P proud při připojení ampérmetru obou rezistorů spojených sériově (schéma e). Využili jsme vztahy pro paralelní a sériové zapojení odporů

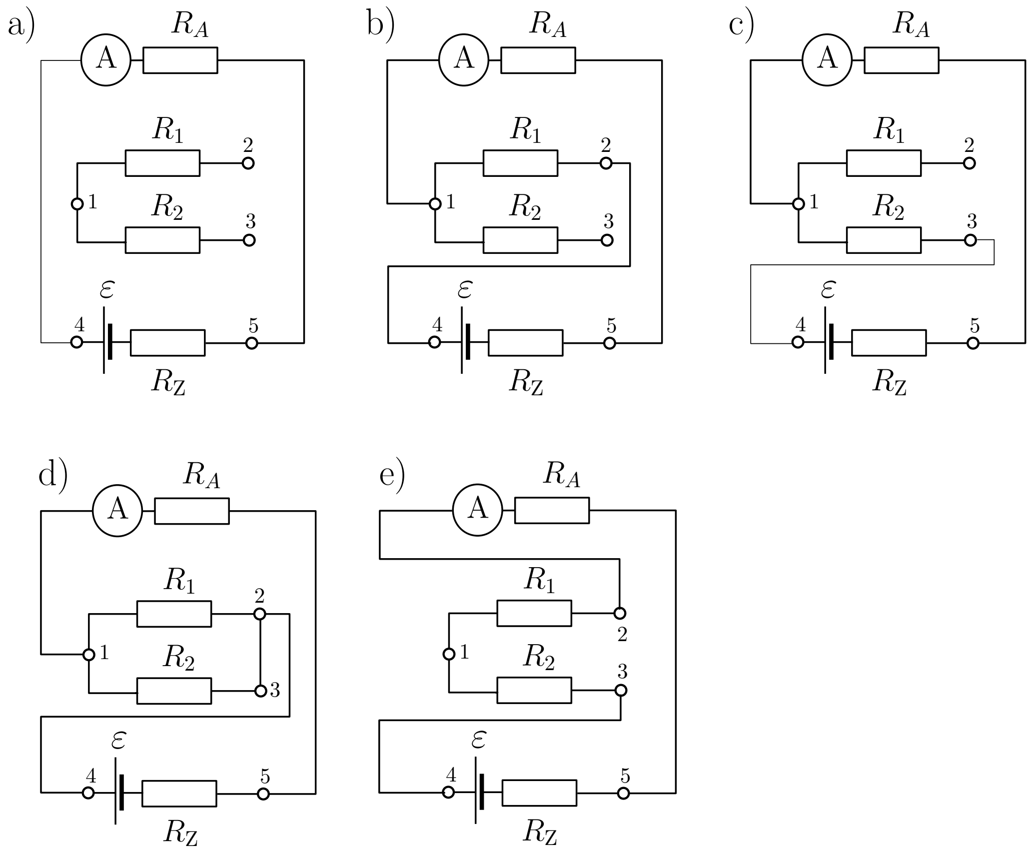
$$R_\mathrm{P} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_\mathrm{S} = R_1 + R_2.$$

Vynásobíme-li nyní například první rovnici I_1, druhou I_0 a odečteme je, dostaneme pro elektromotorické napětí neznámého zdroje

$$\varepsilon = \frac{I_0 I_1}{I_0 - I_1} R_1, \tag{1}$$

takže k jeho určení podmínky I a II nepotřebujeme. Dosazením zpět do rovnice a) získáme R_i,

$$R_\mathrm{i} = \frac{\varepsilon}{I_0} = \frac{I_1}{I_0 - I_1} R_1 \tag{2}$$



Obrázek 1: Zapojení prvků „krabičky“ a ampérmetru pro určení neznámých parametrů

a dosazením do rovnice c) po úpravě

$$R_2 = \frac{I_0 I_1 - I_1 I_2}{I_0 I_2 - I_1 I_2} R_1,$$

takže i tyto hodnoty jsme schopni určit bez doplňkových podmínek v rámci přesnosti měření jednoznačně.

Zapojení d) a e) nám dávají další možnosti výpočtu hledaných neznámých. Protože však ve všech rovnicích a) – e) figuruje pouze součet $R_\mathrm{A} + R_\mathrm{Z} = R_\mathrm{i}$, nebyli bychom z nich bez podmínek I a II schopni určit hodnoty těchto jednotlivých sčítanců. Z doplňkových podmínek ale plyne, že

$$R_\mathrm{i} = R_\mathrm{A} + R_\mathrm{ZP} + R_\mathrm{ZV} = R_\mathrm{A} + nR_1 + R_\mathrm{ZV},$$

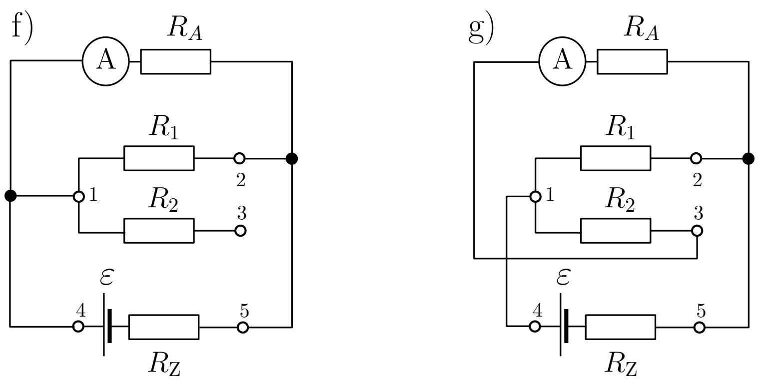
kde n je přirozené číslo, $R_\mathrm{ZV} = 2\,\Omega$ známe (a prakticky můžeme i zanedbat) a navíc víme, že $R_\mathrm{A} < R_1$.

Proto R_A musí být rovno zbytku po celočíselném dělení $R_\mathrm{i} - R_\mathrm{ZV}$ hodnotou R_1 a n je celé číslo, které je výsledkem tohoto celočíselného dělení. S jejich využitím tedy určíme i R_A a R_ZP jednoznačně.

Pokud bychom podmínky I a II neměli, i tak bychom si mohli poradit, pouze bychom museli přestoupit klasickou poučku, že „ampérmetr se do obvodu zapojuje sériově“. Oddělení R_A a R_Z dosáhneme zapojením, ve kterém tyto odpory nebudou součástí téže větve obvodu. Uvažte třeba schéma f) na obrázku 2. Řešení se zde poněkud komplikuje tím, že v zapojení máme dva neznámé proudy (větvemi, v nichž neleží ampérmetr), ty však můžeme pomocí Kirchhoffových zákonů vyloučit a dostaneme další nezávislou rovnici

$$\text{f)} \quad \varepsilon = I_{\mathrm{Af)}} \left(R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{Z}} + \frac{R_{\mathrm{A}} R_{\mathrm{Z}}}{R_1} \right),$$

kde $I_{\mathrm{Af)}}$ je proud ampérmetrem v tomto zapojení. Spolu se dvěma nezávislými rovnicemi z předchozího postupu (např. a) a b)) vede na kvadratickou rovnici pro R_{A} a R_{Z}. Tím se nám počet řešení, která mohla dosud nabývat hodnot v intervalu od nuly až po R_{i}, redukuje na dvě – i z rovnice f) je zřejmé, že je symetrická vůči záměně R_{A} a R_{Z}.



Obrázek 2: Další možnosti zapojení prvků „krabičky“ a ampérmetru pro určení $R_{\mathrm{A}}+R_{\mathrm{ZP}}$

Pro jednoznačné řešení tedy potřebujeme ještě alespoň jednu další podmínku, kterou získáme například díky zapojení g). Označíme-li proud ampérmetrem v tomto zapojení $I_{\mathrm{Ag)}}$, bude

$$\text{g)} \quad \varepsilon = I_{\mathrm{Ag)}} \left(R_{\mathrm{A}} + R_2 + R_{\mathrm{Z}} + \frac{(R_{\mathrm{A}} + R_2) R_{\mathrm{Z}}}{R_1} \right)$$

a výsledek bude určen už jednoznačně, omezeni už budeme pouze přesností použitých pomůcek.

Praktická realizace

Měřením v zapojeních b) a c) okamžitě zjistíme, že proudy $I_1 = I_2$ a tedy i oba rezistory musejí být stejné, $R_1 = R_2$ (pokud bychom si nebyli jisti, zda pro takový závěr měříme dostatečně přesně, opřeme se i o podmínku I). Označme $R_1 = R_2 = R$, z rovnic a) – e) pak dostaneme

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \varepsilon &= I_0 R_{\mathrm{i}}, \\ \text{b)} \quad \varepsilon &= I_1 (R_{\mathrm{i}} + R), \\ \text{d)} \quad \varepsilon &= I_{\mathrm{P}} \left(R_{\mathrm{i}} + \frac{R}{2} \right), \\ \text{e)} \quad \varepsilon &= I_{\mathrm{S}} (R_{\mathrm{i}} + 2R). \end{aligned}$$

Elektromotorické napětí zdroje pak vypočteme ze vztahu 1 a celkový vnitřní odpor ze vztahu 2

$$\varepsilon = \frac{I_0 I_1}{I_0 - I_1} R, \qquad R_{\mathrm{i}} = \frac{I_1}{I_0 - I_1} R.$$

Další varianty dostaneme třeba použitím rovnic a) a d) nebo a) a e), případně jinou kombinací.

$$\varepsilon = \frac{I_0 I_{\mathrm{P}}}{I_0 - I_{\mathrm{P}}} \cdot \frac{R}{2}, \qquad R_{\mathrm{i}} = \frac{I_{\mathrm{P}}}{I_0 - I_{\mathrm{P}}} \cdot \frac{R}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{I_0 I_\mathrm{S}}{I_0 - I_\mathrm{S}} \cdot 2R, \qquad R_\mathrm{i} = \frac{I_\mathrm{S}}{I_0 - I_\mathrm{S}} \cdot 2R.$$

Hodnoty R_A a R_ZP snadno určíme výše popsaným postupem pomocí podmínek I a II. Pokud bychom se bez nich chtěli obejít, je zřejmé, že musíme skutečně využít zapojení podle schémat f) i g), pouhou záměnou rezistorů R_1 a R_2, která se také nabízí, bychom vzhledem k jejich rovnosti žádnou novou informaci nezískali.

Po dosazení naměřených numerických hodnot vychází $\varepsilon \doteq 1,6\mathrm{V}$, $n = 2$, $R_\mathrm{ZP} = 780\,\Omega$ a $R_\mathrm{A} \doteq 158\,\Omega$ nebo $R_\mathrm{A} \doteq 296\,\Omega$, podle použitého ampérmetru.

Diskuse odchylky měření

Při relativní odchylce odporu rezistoru $\delta R_1 = 1\%$ a hodnotě $R_1 = R = 390\,\Omega$ je absolutní odchylka $\Delta R_1 = 3,9\,\Omega$. Jak bylo řečeno v zadání, vzhledem k podmínce, že odpor R_2 je celočíselným násobkem odporu R_1, můžeme očekávat, že je určen se stejnou relativní přesností 1% a protože $R_2 = R_1$, i jeho absolutní odchylka bude stejná a rovna $\Delta R_2 = 3,9\,\Omega$. Analogicky můžeme předpokládat pro $R_\mathrm{ZP} = 780\,\Omega$ rovněž $\delta R_\mathrm{ZP} = 1\%$ a $\Delta R_\mathrm{ZP} = 7,8\,\Omega$; odchylku R_ZV neznáme, ale vzhledem k jeho hodnotě ji patrně můžeme zanedbat.

Určení vnitřního odporu ampérmetru je podstatně nepřesnější a určení jeho odchylky složitější. Jsme si vědomi, že ampérmetr měří s menší relativní chybou hodnoty blízké maximálnímu rozsahu, tento efekt ale nebude mít při našem měření (s ohledem na skutečně naměřené hodnoty) největší vliv. Vnitřní odpor ampérmetru počítáme podle vztahu:

$$R_\mathrm{A} = R_\mathrm{i} - R_\mathrm{ZP} - R_\mathrm{ZV},$$

kde výraz pro výpočet R_i vždy obsahuje rozdíl proudů ve jmenovateli – v případě blízkých hodnot to může být zdrojem tak velkých odchylek, že výsledek měření se může značně lišit od skutečnosti. Proto jako nejpřesnější vychází takové měření, kde je tento rozdíl největší, tj. pro proudy I_0 a I_S. Tuto úvahu lze doložit výpočtem odchylek měření pro i další případy, ty zde ale rozepisovat nebudeme. V dalším postupu budeme tedy pracovat se vztahem

$$R_\mathrm{i} = \frac{I_\mathrm{S}}{I_0 - I_\mathrm{S}} \cdot 2R.$$

Uvažujme ampérmetr s vnitřním odporem $R_\mathrm{A} \doteq 158\,\Omega$, ty mají třídu přesnosti $0,5$. Absolutní přípustná odchylka při rozsahu 2,4 mA je tedy pro obě měřené hodnoty proudu stejná a rovna $\Delta I = 0,012\,\mathrm{mA}$.

Jak velký vliv mají odchylky vstupních proměnných na výslednou funkci, zjistíme nejlépe pomocí jejích parciálních derivací podle těchto proměnných – derivace určuje rychlost změny výsledné funkce se změnou dané proměnné a po vynásobení odchylkou proměnné dostaneme přenesenou odchylku výsledné funkce. V teorii nejistot se většinou nepředpokládá ta nejhorší varianta, že by se všechny odchylky sčítaly, obvykle se sčítají kvadráty odchylek (Gaussův zákon nejistot).

V našem případě dostaneme:

$$\begin{aligned} \Delta R_\mathrm{A} = &= \sqrt{\left(\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial I_\mathrm{S}}\Delta I_\mathrm{S}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial I_0}\Delta I_0\right)^2 + \left(\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial R}\Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial R_\mathrm{A}}{\partial R_\mathrm{ZP}}\Delta R_\mathrm{ZP}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{I_0}{(I_0 - I_\mathrm{S})^2} \cdot 2R\Delta I_\mathrm{S}\right)^2 + \left(-\frac{I_\mathrm{S}}{(I_0 - I_\mathrm{S})^2} \cdot 2R\Delta I_0\right)^2 + \left(\frac{I_\mathrm{S}}{I_0 - I_\mathrm{S}} \cdot 2\Delta R\right)^2 + (-\Delta R_\mathrm{ZP})^2}. \end{aligned}$$

Při dosazení konkrétních hodnot $I_0 = 1,72\,\mathrm{mA}$ a $I_\mathrm{S} = 0,94\,\mathrm{mA}$ vychází $R_\mathrm{A} = 156\,\Omega$, chyba $\Delta R_\mathrm{A} = 33\,\Omega$ a relativní chyba $\delta R_\mathrm{A} = 21\%$, přičemž třetí a čtvrtý sčítanec pod odmocninou jsou vůči prvním dvěma téměř zanedbatelné. Pro měření na ampérmetrech s vnitřním odporem $R_\mathrm{A} = 296\,\Omega$, které mají třídu přesnosti 1, vycházejí relativní chyby při analogickém postupu už 29%, což je pro praktické použití určitě nepřijatelné. Naštěstí skutečné měření vychází při pečlivém odečtu podstatně lépe (jak bylo ověřeno proměřením hledaných parametrů jiným, vhodnějším postupem).

Na střední škole se často nejistoty určují poněkud jiným způsobem, pro výrazy zahrnující součty nebo rozdíly se sčítají absolutní odchylky jednotlivých členů, pro součiny a podíly se sčítají relativní odchylky. V našem případě by to tedy bylo:

$$
\begin{aligned}
\Delta I_0 &= 0,012\,\mathrm{mA},\\
\Delta I_\mathrm{S} &= 0,012\,\mathrm{mA}, \quad \delta \mathrm{I_S} = \frac{0,012\,\mathrm{mA}}{0,94\,\mathrm{mA}} \cdot 100\% = 1,3\%,\\
\Delta(I_0 - I_\mathrm{S}) &= \Delta I_0 + \Delta I_\mathrm{S} = 0,024\,\mathrm{mA}, \quad \delta(I_0 - I_\mathrm{S}) = \frac{\Delta(I_0 - I_\mathrm{S})}{I_0 - I_\mathrm{S}} \cdot 100\% = 3,1\%,\\
\delta R &= 1\%,\\
\delta R_\mathrm{i} &= \delta I_\mathrm{S} + \delta(I_0 - I_\mathrm{S}) + \delta R = 5,4\%,\\
\Delta R_\mathrm{i} &= \delta R_\mathrm{i} \cdot R_\mathrm{i} = 50\,\Omega,\\
\Delta R_\mathrm{A} &= \Delta R_\mathrm{i} + \Delta R_\mathrm{ZV} = 58\,\Omega,\\
\delta R_\mathrm{A} &= \frac{\Delta R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A}} \cdot 100\% = 37\%.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že tento odhad chyby nadhodnocuje oproti předchozímu postupu. Vyčíslením průběžných výsledků jsme ale získali dobrou představu o hlavních slabých místech měření – na relativní odchylce δR_i má rozhodující podíl odchylka rozdílu proudů (ta je patrně poněkud nadhodnocena, při měření podobných hodnot stejným ampérmetrem se asi chyby ve skutečnosti nebudou sčítat, naopak se mohou částečně kompenzovat), dalším problematickým místem je nutnost závěrečného odečtu $R_\mathrm{A} = R_\mathrm{i} - R_\mathrm{Z}$, kdy ještě přijatelná relativní chyba odporu R_i vede na podstatně větší relativní chybu hledaného vnitřního odporu R_A.

Úkol 3 (2 body)

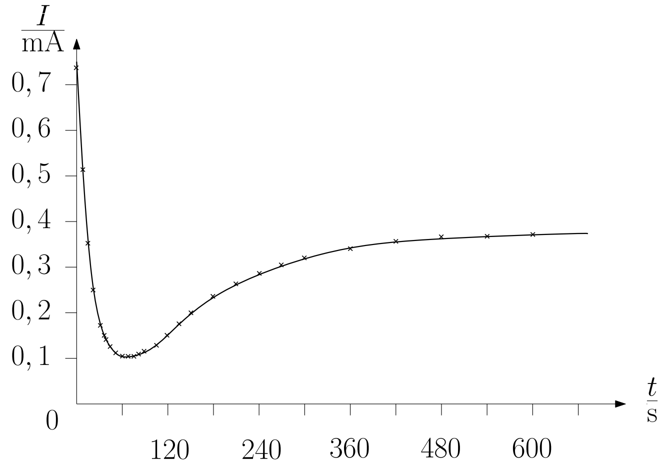
Podle textu v úvodu můžeme očekávat, že elektromotorické napětí Voltova článku nepřekročí hodnotu $\varepsilon_{\mathrm{id.}} = 0,34\,\mathrm{V} - (-0,76\,\mathrm{V}) = 1,1\,\mathrm{V}$, přičemž měděná elektroda bude kladná a zinková záporná. Při rozsahu ampérmetru 2,4 mA to odpovídá celkovému odporu

$$R_\mathrm{C} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{id.}}}{I_{\mathrm{max.}}} = \frac{1,1}{2,4 \cdot 10^{-3}}\,\Omega = 458\,\Omega,$$

takže se nemusíme obávat překročení rozsahu ampérmetru při zapojení podle pokynů k následujícímu úkolu.

Úkol 4 (3 body)

Na obrázku je příklad časové závislosti proudu v prvních deseti minutách po ponoření elektrod do elektrolytu – konkrétní hodnoty se mohou lišit. Hodnoceno je zachycení první oblasti velmi rychlého poklesu proudu, které dokládá, že si řešitel vše dobře připravil a dokázal pracovat i pod časovým



Obrázek 3: Příklad časové závislosti proudu po prvním ponoření elektrod do elektrolytu

tlakem, rozumná volba časových intervalů v následujících fázích, vhodná volba měřítka a rozsahu grafu, správný popis os. Je vidět, že se nejedná o žádnou jednoduchou funkční závislost.

Úkol 5 (3 body)

Souvislost mezi elektromotorickým napětím, vnitřním odporem a proudem v obou zapojeních udávají následující vztahy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathrm{V}} &= (R_{\mathrm{V}} + R_1 + R_{\mathrm{A}})\, I \\ \varepsilon_{\mathrm{V}} &= (R_{\mathrm{V}} + R_1 + R_{\mathrm{A}} + R_2)\, I'. \end{aligned}$$

Z této soustavy dvou rovnic vyjádříme

$$R_{\mathrm{V}} = \frac{I' R_2}{I - I'} - R_1 - R_{\mathrm{A}},$$

$$\varepsilon_{\mathrm{V}} = \frac{I\, I'}{I - I'} R_2.$$

Numericky vychází elektromotorické napětí $\varepsilon_{\mathrm{V}} \doteq 0,5\,\mathrm{V}$ a vnitřní odpor zdroje $R_{\mathrm{V}} \approx 300\,\Omega$ – jeho hodnota se vyvíjí v čase a je silně závislá na konkrétních podmínkách, ale získali jsme o ní alespoň řádovou představu. Vidíme, že v této jednoduché podobě se Voltův článek se jako zdroj proudu nehodí.

Úkol 6 (2 body)

Při opatrném povytažení elektrod z elektrolytu pozorujeme pokles proudu obvodem. Vzhledem k tomu, že elektromotorické napětí mezi elektrodami galvanického článku na ploše elektrod z principu nezávisí, musí to být způsobeno nárůstem vnitřního odporu zdroje (analogicky, jako je větší odpor vodiče s menším průřezem). Při prudkém vytažení může dojít k uvolnění vodíkové vrstvičky na měděné elektrodě a proud může přechodně stoupnout, následně se ale také „ustálí“ na nižší hodnotě než původně.