Řešení úloh celostátního kola 57. ročníku fyzikální olympiády

Autor úloh: J. Thomas

1. Úlohu budeme řešit v neinerciální vztažné soustavě spojené s rotující nádobou. Síly působící na kuličky znázorňují obrázky R1 a R2. Jsou nakresleny v různém měřítku.

a) Tíhová síla $\boldsymbol{F}_{G1}$ a setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}1}$ působící na dřevěnou kuličku mají výslednici $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti

$$F_1 = \sqrt{F_{G1}^2 + F_{\mathrm{s}1}^2} = m_1\sqrt{g^2 + \omega^4 r_1^2} = V\rho_1\sqrt{g^2 + \omega^4 r_1^2}.$$

Podle Archimédova zákona působí na dřevěnou kuličku ještě v opačném směru vztlaková síla o velikosti

$$F_{\mathrm{v}1} = V\rho_{\mathrm{k}}\sqrt{g^2 + \omega^4 r_1^2} = F_1\frac{\rho_{\mathrm{k}}}{\rho_1} > F_1.$$

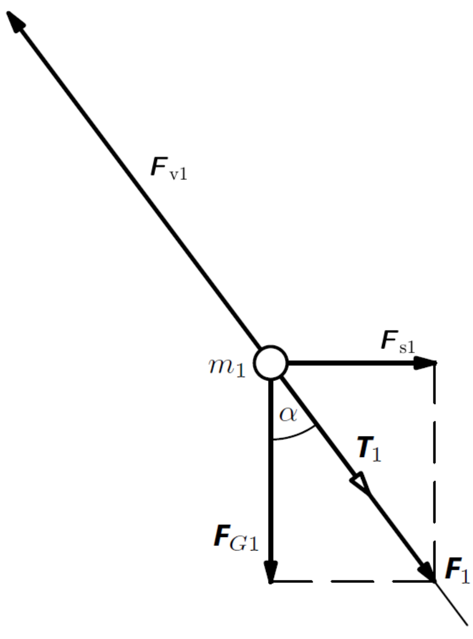
V téže vektorové přímce jako síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}1}$ musí působit i tažná síla vlákna $\boldsymbol{T}_1$, která je s nimi v rovnováze. Vztlaková síla působící na dřevěnou kuličku má tedy směr horní části vlákna a svírá se svislým směrem úhel α. Snadno odvodíme, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 r_1}{g} = \frac{3}{4}.$$

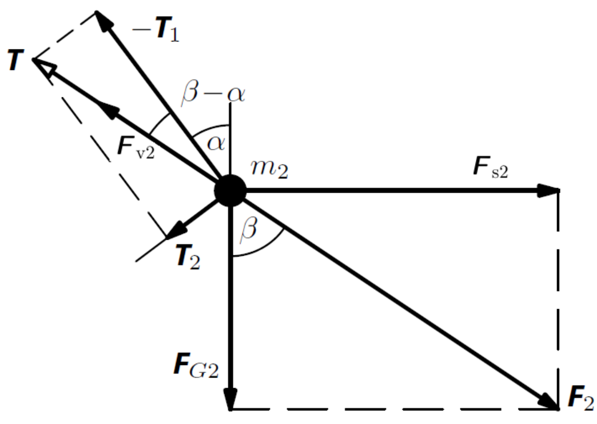
U hliníkové kuličky má vztlaková síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}2}$ opačný směr než výslednice $\boldsymbol{F}_2$ tíhové síly $\boldsymbol{F}_{G2}$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}2}$. Svírá tedy se svislým směrem úhel β, pro který platí

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\omega^2 r_2}{g} = \frac{\omega^2\cdot 2r_1}{g} = 2\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}.$$

3 body



Obr. R1



Obr. R2

b) Výslednice $\boldsymbol{T}$ tahových sil, kterými obě části vlákna působí na hliníkovou kuličku, je v rovnováze s výslednicí sil $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}2}$ a svírá se svislým směrem úhel β. U hliníkové kuličky je

$$F_{\mathrm{v}2} = V\rho_{\mathrm{k}}\sqrt{g^2 + 4\omega^4 r_1^2} = F_2\frac{\rho_{\mathrm{k}}}{\rho_2} < F_2.$$

Z obr. R2 odvodíme

$$\frac{T_2}{T_1} = \mathrm{tg}\,(\beta - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\beta \cdot \mathrm{tg}\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{1 + 2\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{1 + 2\frac{9}{16}} = \frac{6}{17}.$$

3 body

c) Pro velikosti $\boldsymbol{T}_1$ a $\boldsymbol{T}$ tahových sil platí

$$T_1 = F_{\mathrm{v}1} - F_1 = F_1\left(\frac{\rho_{\mathrm{k}}}{\rho_1} - 1\right) = \frac{F_{G1}}{\cos\alpha} \cdot \frac{\rho_{\mathrm{k}} - \rho_1}{\rho_1},$$

$$T = F_2 - F_{\mathrm{v}2} = F_2\left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{k}}}{\rho_2}\right) = \frac{F_{G2}}{\cos\beta} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_{\mathrm{k}}}{\rho_2},$$

z toho

$$F_{G1} = V_1\rho_1 g = T_1\frac{\rho_1\cos\alpha}{\rho_{\mathrm{k}} - \rho_1}, \quad F_{G2} = V_2\rho_2 g = T\frac{\rho_2\cos\beta}{\rho_2 - \rho_{\mathrm{k}}}.$$

Vydělením obou vztahů dostaneme

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_{\mathrm{k}}}{\rho_{\mathrm{k}} - \rho_1},$$

přičemž

$$T = \sqrt{T_1^2 + \left(\frac{6T_1}{17}\right)^2} = \frac{5\sqrt{13}}{17}T_1, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\beta}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Po dosazení a úpravě vychází

$$\frac{V_1}{V_2} = 4{,}62, \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{\frac{V_1}{V_2}} = 1{,}67.$$

4 body

2. a) Vztah mezi siderickou a synodickou oběžnou dobou vyplývá ze vztahu mezi úhlovými rychlostmi:

$$\frac{1}{T_{\mathrm{sid}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{Z}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{syn}}} \quad \Rightarrow \quad T_{\mathrm{sid}} = \frac{T_{\mathrm{syn}}T_{\mathrm{Z}}}{T_{\mathrm{syn}} - T_{\mathrm{Z}}} \doteq 10\,800 \text{ dní} = 29{,}4 \text{ roku}.$$

Ze 3. Keplerova zákona:

$$a_{\mathrm{Sat}}^3 = a_{\mathrm{Z}}^3 \cdot \frac{T_{\mathrm{sid}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{Sat}} = a_{\mathrm{Z}} \cdot \sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{sid}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2}} = a_{\mathrm{Z}}\sqrt[3]{\frac{T_{\mathrm{syn}}^2}{(T_{\mathrm{syn}} - T_{\mathrm{Z}})^2}} = 9{,}55 \text{ au}.$$

Vzdálenost Saturnu od Slunce v perihéliu je $r_{\mathrm{p}} = a_{\mathrm{Sat}}\,(1 - \varepsilon) = 9{,}00$ au, v aféliu $r_{\mathrm{a}} = a_{\mathrm{Sat}}\,(1 + \varepsilon) = 10{,}1$ au.

3 body

b) Velká poloosa Hohmannovy trajektorie:

$$a_\mathrm{H} = \frac{1}{2}\left(r_\mathrm{a} + a_\mathrm{Z}\right) = 5{,}53\ \mathrm{au}.$$

Doba letu

$$t = \frac{1}{2}T_\mathrm{H} = \frac{1}{2}T_\mathrm{Z} \cdot \sqrt{\frac{a_\mathrm{H}^3}{a_\mathrm{Z}^3}} = 6{,}51\ \mathrm{roku}.$$

Ze zákona zachování energie: $\frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 - \frac{GmM}{r_\mathrm{a}} = -\frac{GmM}{2a_\mathrm{H}}$ po úpravě pro rychlost sondy v aféliu:

$$v_\mathrm{a} = \sqrt{GM_\mathrm{S}\left(\frac{2}{r_\mathrm{a}} - \frac{1}{a_\mathrm{H}}\right)} = \sqrt{2GM_\mathrm{S}\frac{a_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{a}\left(r_\mathrm{a} + a_\mathrm{Z}\right)}} = 3{,}99\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

3 body

Poznámka: K odvození můžeme použít přímo ZZE a druhý Keplerův zákon:

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - \frac{GmM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{Z}} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 - \frac{GmM_\mathrm{S}}{r_\mathrm{a}}.$$

a $v_\mathrm{p} = v_\mathrm{a}\frac{a_\mathrm{Saf}}{a_\mathrm{Z}}$, odkud po dosazení a úpravě dostáváme

$$v_\mathrm{a} = \sqrt{2GM_\mathrm{S}\frac{a_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{a}\left(r_\mathrm{a} + a_\mathrm{Z}\right)}} = 3{,}99\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

c) Při vzdalování sondy od mateřské lodi dochází podle Dopplerova jevu ke snížení frekvence nosné vlny přijímaného signálu. Platí:

$$f_1 = f\cdot\left(\frac{c-v}{c}\right) \quad\Rightarrow\quad \Delta f = f - f_1 = f\cdot\frac{v}{c} = 42\ \mathrm{kHz}.$$

2 body

d) Gravitační síla mezi Saturnem a Titanem je silou dostředivou, proto

$$M_\mathrm{T}\frac{4\pi^2}{T_\mathrm{T}^2}\cdot r_\mathrm{T} = G\frac{M_\mathrm{Sat}M_\mathrm{T}}{r_\mathrm{T}^2} \quad\Rightarrow\quad M_\mathrm{Sat} = \frac{4\pi^2 r_\mathrm{T}^3}{GT_\mathrm{T}^2} = 5{,}70\cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}.$$

Gravitační zrychlení na povrchu Titanu:

$$a_\mathrm{g} = G\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2} = 1{,}35\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

3. a) Teplota plynu, jehož stav je zobrazen přímkou, roste se vzdáleností od počátku. Proto $T_\mathrm{min} = T_1$ a $T_3 = kT_1$. Dále platí:

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{\dfrac{nRT_3}{V_3}}{\dfrac{nRT_1}{V_1}} = \frac{T_3}{T_1}\frac{V_1}{V_3} = k\frac{V_1}{V_3} \quad\Rightarrow\quad \frac{V_3}{V_1} = \sqrt{k} = 2,$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\dfrac{V_1 + V_3}{2}}{V_1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{V_3}{V_1}\right) = \frac{1 + \sqrt{k}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Z rovnic $\dfrac{p_1 V_1}{T_1} = \dfrac{p_2 V_2}{T_2}$ a $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{V_2}{V_1}$ plyne

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = \frac{V_2^2}{V_1^2} T_1 = \frac{\left(1 + \sqrt{k}\right)^2}{4} T_1 = 675\ \mathrm{K}.$$

5 bodů

b) Abychom určili účinnost cyklu, musíme určit teplo Q_1, které plyn během cyklu dostane od ohřívače a práci W', kterou plyn během cyklu vykoná. V daném cyklu plyn přijímá teplo při ději 1–2–3. Podle 1. zákona termodynamiky platí:

$$Q_1 = \Delta U_{13} + W'_{123} = \frac{5}{2} nR\left(T_3 - T_1\right) + \frac{1}{2}\left(p_1 + p_3\right)\left(V_3 - V_1\right).$$

Užitím vztahu $\dfrac{V_3}{V_1} = \dfrac{p_3}{p_1}$ a stavové rovnice dostaneme

$$Q_1 = \frac{5}{2} nR\left(T_3 - T_1\right) + \frac{1}{2}\left(p_1 V_3 - nRT_1 + nRT_3 - p_3 V_1\right) =$$
$$= 3nR\left(T_3 - T_1\right) = 3\left(k - 1\right) nRT_1.$$

Práce plynem vykonaná během cyklu: Vykonaná práce je rovna součtu obsahů dvou shodných trojúhelníků:

$$W' = 2 \cdot \frac{\left(p_2 - p_1\right)\left(V_2 - V_1\right)}{2} = p_1 V_1 + p_2 V_2 - p_1 V_2 - p_2 V_1.$$

Dosazením $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{1 + \sqrt{k}}{2}$ a $\dfrac{p_1}{V_1} = \dfrac{p_2}{V_2}$ a drobnou úpravou dále dostaneme

$$W' = nRT_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)^2 = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{4} nRT_1.$$

Pro účinnost kruhového děje pak:

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{\dfrac{1 - 2\sqrt{k} + k}{4} nRT_1}{3\left(k - 1\right) nRT_1} = \frac{1 - 2\sqrt{k} + k}{12\left(k - 1\right)} = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{12\left(k - 1\right)} = \frac{1}{36} = 2{,}8\ \%$$

5 bodů

Alternativní výpočet vykonané práce:

Vykonaná práce je rovna polovině obsahu trojúhelníku s vrcholy 1, 3 a s třetím vrcholem určeným objemem V_3 a tlakem p_1:

$$\frac{1}{4}\left(p_3 - p_1\right)\left(V_3 - V_1\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{k} - 1\right) p_1 \left(\sqrt{k} - 1\right) V_1 =$$
$$= \frac{1}{4} p_1 V_1 \left(\sqrt{k} - 1\right)^2 = \frac{1}{4} nRT_1 \left(\sqrt{k} - 1\right)^2.$$

4. a) Reakce probíhá podle rovnice ${}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{18}_{8}\mathrm{O} \rightarrow {}^{18}_{9}\mathrm{F} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$.
Energie reakce

$$E_{\mathrm{r1}} = \left[m({}^{1}_{1}\mathrm{H}) + m({}^{18}_{8}\mathrm{O}) - m({}^{18}_{9}\mathrm{F}) - m_{\mathrm{n}}\right] c^2 = -3{,}91 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = -2{,}44\ \mathrm{MeV}.$$

Aby reakce proběhla, je tedy třeba energii dodat. Urychlené protony mají energii 4,00 MeV $> |E_{\mathrm{r1}}|$; reakce tedy může proběhnout.

2 body

b) Rychlost protonů $v = \sqrt{\dfrac{2E_{\mathrm{k}}}{m_{\mathrm{p}}}} = 2{,}77 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Na obíhající protony působí magnetická síla, která je silou dostředivou. Platí:

$$\frac{m_{\mathrm{p}}v^2}{r} = Bev, \quad \text{pak} \quad r = \frac{m_{\mathrm{p}}v}{Be} = \frac{\sqrt{2E_{\mathrm{k}}m_{\mathrm{p}}}}{Be} = 0{,}289\ \mathrm{m}.$$

2 body

c) Reakce probíhá podle rovnice ${}^{18}_{9}\mathrm{F} \rightarrow {}^{18}_{8}\mathrm{O} + \mathrm{e}^{+} + \nu$.
Energie reakce (ubyde také jeden elektron z atomového obalu):

$$E_{\mathrm{r2}} = \left[m({}^{18}_{9}\mathrm{F}) - m({}^{18}_{8}\mathrm{O}) - 2m_{\mathrm{e}}\right] c^2 =$$
$$= [18{,}000\,938 - 17{,}999\,161 - 2 \cdot 0{,}000\,549] \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{J} =$$
$$= 1{,}01 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 0{,}634\ \mathrm{MeV}.$$

$E_{\mathrm{r2}} > 0$, reakce tedy bude probíhat spontánně.

2 body

d) Částice byly před anihilací v klidu, proto podle zákona zachování hybnosti musí být vektorový součet jejich hybností roven nule.
Energie fotonu $m_{\mathrm{e}}c^2 = 8{,}20 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 513\ \mathrm{keV}$, což v rámci chyby způsobené zaokrouhlením odpovídá uvedené informaci. Podle vztahu mezi hmotností a energií platí:

$$m_{\mathrm{e}}c^2 = \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{h}{m_{\mathrm{e}}c} = 2{,}42\ \mathrm{pm},$$

jde o foton rentgenového záření.

2 body

e) Za dobu Δt urazí foton vzdálenost $\Delta x = c\Delta t = 0{,}21$ m. Místo vzniku fotonů bylo tedy 10,5 cm od středu úsečky spojující detektory blíže k detektoru, který zaznamenal signál jako první.

1 bod

f) Podle zákona radioaktivní přeměny $A = A_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, odtud

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24 \cdot 60}{109{,}8}} = 1{,}13 \cdot 10^{-4} = 0{,}011\,\%.$$

Aktivita radionuklidu ${}^{18}\mathrm{F}$ je po 24 hodinách vůči jeho původní aktivitě skutečně zanedbatelná.

1 bod