Řešení úloh 1. kola 57. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3), J. Jírů (4, 5), J. Šlégr (6) a T. Táborský (7)

1.a) Označme stranu čtverce na mapě d.
Autobus za 1 hodinu urazí dráhu $s_1 = d\sqrt{6^2 + 3^2} = 3d\sqrt{5}$.
Chodec za 1 hodinu urazí dráhu $s_2 = \frac{d}{2}\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{d}{4}\sqrt{5}$.
Poměr rychlostí autobusu a chodce je stejný jako poměr drah uražených za 1 hodinu:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} = 12.$$

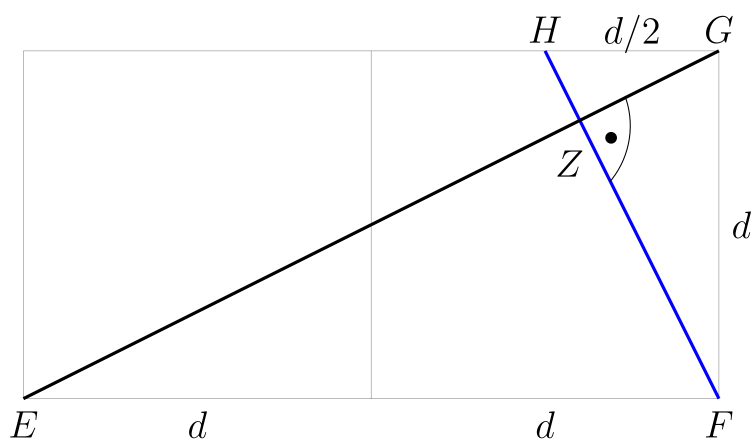
3 body

b) Nejprve určíme místo zastávky. Jeho souřadnice budou souřadnicemi průsečíku přímky $y = \frac{1}{2}x$ (trajektorie autobusu) s přímkou $y = -2x + 14d$ (trajektorie chodce). Řešením soustavy dostaneme $x = 5{,}6d$ a $y = 2{,}8d$.
Protože autobus musí od 12:30 h urazit dráhu $s_a = d\sqrt{(5,6)^2 + (2,8)^2} = 6{,}26d$ a za hodinu ujede dráhu s_1, bude mu jízda k zastávce trvat dobu $t_a = \frac{6{,}26d}{3d\sqrt{5}} =$ $= 0{,}933\ \text{h} = 56\,\text{min}$, bude tedy na zastávce ve 13:26 h.
Chodec musí urazit od 10:00 h z bodu D dráhu $s_{ch} = d\sqrt{(5{,}6 - 5)^2 + (2{,}8 - 4)^2}$ $= 1,34d$ a za hodinu ujde dráhu s_2, bude mu cesta k zastávce trvat dobu $t_{ch} = \frac{1{,}34d}{\frac{d}{4}\sqrt{5}} = 2{,}40\ \text{h} = 2\ \text{h}\ 24\,\text{min}$. Na zastávku tedy dorazí ve 12:24 h a bude na autobus čekat 62 minut.
4 body

c) Chodec ujde vzdálenost $\frac{d}{2}\sqrt{5}$ za 2,75 h, za hodinu tedy ujde $\frac{2d}{11}\sqrt{5}$; cesta k zastávce mu bude trvat $t'_{ch} = \frac{1{,}34d}{\frac{2d}{11}\sqrt{5}} = 3{,}30\ \text{h} = 3\ \text{h}\ 18\ \text{min}$. Na zastávce tedy bude 8 minut před příjezdem autobusu.
3 body

Alternativní řešení části b):

Při hledání místa zastávky vyjdeme z podobnosti trojúhelníků:



Obr. R1

Trojúhelník HZG je podobný trojúhelníku GFE:

$$\frac{|HZ|}{\frac{d}{2}} = \frac{|FG|}{|EG|} = \frac{d}{d\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad |HZ| = \frac{d}{2\sqrt{5}}.$$

Trojúhelník GFE je podobný trojúhelníku FZE:

$$\frac{|EZ|}{2d} = \frac{2d}{d\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad |EZ| = \frac{4d\sqrt{5}}{5}.$$

Dráha uražená chodcem z bodu D pak bude

$$|DH| + |HZ| = \frac{d}{2}\sqrt{5} + \frac{d}{2\sqrt{5}} = \frac{3d}{\sqrt{5}}$$

a doba jeho chůze $t_{ch} = \frac{\frac{3d}{\sqrt{5}}}{\frac{d}{4}\sqrt{5}}\ \mathrm{h} = \frac{12}{5}\ \mathrm{h} = 2\ \mathrm{h}\ 24\,\mathrm{min}\,.$

Dráha ujetá autobusem z bodu A k zastávce je

$$2\,|AB| + |EZ| = 2d\sqrt{5} + \frac{4d\sqrt{5}}{5} = \frac{14d\sqrt{5}}{5}$$

a doba jeho jízdy $t_a = \frac{\frac{14d\sqrt{5}}{5}}{3d\sqrt{5}} = \frac{14}{15}\ \mathrm{h} = 56\,\mathrm{min}.$

2.a) Podle 2. pohybového zákona platí:

$$F = m\frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{m(v_1 - v_2)}{t_\mathrm{b}} = 6{,}7 \cdot 10^3\ \ \mathrm{N}.$$

Potřebná brzdná dráha je $s_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} t_\mathrm{b} = 67{,}5\ \mathrm{m}.$ **2 body**

b) Práce výsledné síly působící na automobil během zrychlování je rovna přírůstku jeho kinetické energie:

$$m a_2 s_2 = \frac{1}{2} m (v_3^2 - v_2^2) \qquad \Rightarrow \qquad v_3 = \sqrt{v_2^2 + 2a_2 s_2} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

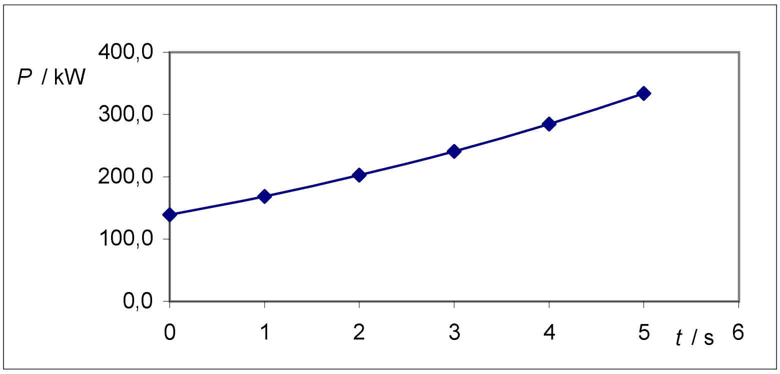
Dráhu s_2 projel automobil za dobu $t_3 = \frac{v_3 - v_2}{a_2} = 5{,}0\ \mathrm{s}.$ **2 body**

c) Rychlost automobilu během zrychlování závisí na čase podle vztahu $v = v_2 + a_2 t$. Motor musí vyvinout sílu o velikosti $F = m a_2 + F_\mathrm{o}$ a jeho okamžitý výkon závisí na čase podle vztahu

$$P = Fv = (m a_2 + F_\mathrm{o})(v_2 + a_2 t) = [m a_2 + (700 + 20\{v_2 + a_2 t\}^2)\ \ \mathrm{N}](v_2 + a_2 t),$$

který použijeme pro výpočet tabulky a sestrojení grafu:

t / s	P / kW
0	139,0
1	168,6
2	202,5
3	241,0
4	284,7
5	334,0



3 body

d) Rychlost automobilu se zmenší na rychlost traktoru za dobu $t_4 = \dfrac{v_3 - v_\mathrm{T}}{a_3}$.

Za tuto dobu ujede automobil dráhu $s_3 = \dfrac{v_3 + v_\mathrm{T}}{2} t_4$ a traktor dráhu $s_\mathrm{T} = v_\mathrm{T} t_4$. Platí $d + s_\mathrm{T} = s_3 + s_0$,

$$d = s_3 - s_\mathrm{T} + s_0 = \frac{v_3 + v_\mathrm{T}}{2} t_4 - v_\mathrm{T} t_4 + s_0 = \frac{(v_3 - v_\mathrm{T})^2}{2a_3} + s_0 = 50{,}6\ \mathrm{m}.$$

3 body

3.a) Protože $\rho < \rho_1$, bude kotouč plovat a $h < h_1$ bude vnořen pouze ve vodě. Tíhová síla a vztlaková síla jsou v rovnováze, proto

$$hS\rho g = HS\rho_1 g \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\rho}{\rho_1} h = 1{,}2\ \mathrm{cm}.$$

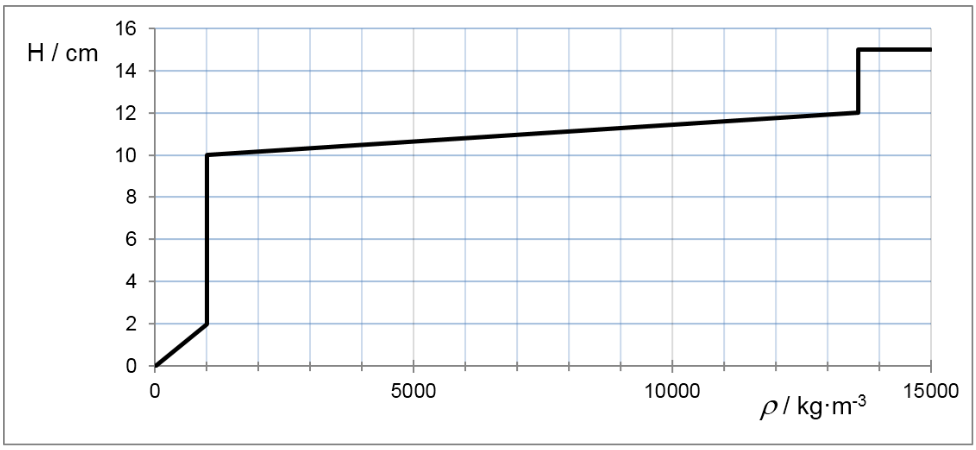
3 body

b) Protože $\rho_1 < \rho < \rho_2$, bude kotouč zcela pod hladinou vody a částečně vnořen do rtuti. Platí $hS\rho g = y_1 S\rho_1 g + y_2 S\rho_2 g$ a také $y_1 + y_2 = h$, kde y_1 je výška kotouče, nacházejícího se ve vodě a y_2 je výška kotouče, nacházejícího se ve rtuti. Řešením soustavy dostáváme

$$y_2 = h\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = 1{,}08\ \mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad H = h_1 + y_2 = 11{,}1\ \mathrm{cm}$$

3 body

c)



4 body

4.a) Vyjdeme z rovnováhy mezi urychlujícími a brzdícími silami:

$$m_1 g \sin\alpha_1 + m_2 g \sin\alpha_1 = f m_2 g \cos\alpha_1.$$

Z rovnice plyne

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{f m_2}{m_1 + m_2},\ \alpha_1 = 16°.$$

2 body

(Výsledek lze též získat po vyřešení části c) z podmínky $a_x = 0$.)

b) Označme r poloměr válce, J moment setrvačnosti válce a ε velikost úhlového zrychlení otáčení válce. Táhlo nebude namáháno, jestliže se každé z těles bude pohybovat samostatně se stejným zrychlením. Velikost samostatného zrychlení válce je určena pohybovou rovnicí

$$m_1 a_1 + \frac{J\varepsilon}{r} = m_1 g \sin\alpha_2,$$

kde

$$J = \frac{1}{2} m_1 r^2,\ \varepsilon = \frac{a_1}{r}.$$

Z rovnice plyne

$$a_1 = \frac{2}{3} g \sin\alpha_2.$$

Velikost samostatného zrychlení kvádru je určena pohybovou rovnicí

$$m_2 a_2 = m_2 g \left(\sin\alpha_2 - f\cos\alpha_2\right),$$

z níž plyne

$$a_2 = g \left(\sin\alpha_2 - f\cos\alpha_2\right).$$

Z rovnosti $a_1 = a_2$ dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = 3f,\ \alpha_2 = 50°.$$

4 body

c) Vyjdeme z pohybové rovnice soustavy obou těles:

$$\left(m_1 a_x + \frac{J\varepsilon}{r}\right) + m_2 a_x = (m_1 + m_2)\, g \sin\alpha - f m_2 g \cos\alpha,$$

kde

$$J = \frac{1}{2} m_1 r^2,\ \varepsilon = \frac{a_x}{r}.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$a_x = \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - f m_2 \cos\alpha}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} \cdot g$$

.

Při sklonu $\alpha = 12°$ se soustava bude pohybovat rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o souřadnici $a_x = -0{,}66\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

4 body

5.a) Uvažujme vodorovnou osu otáčení procházející těžištěm ležícího sudu a kolmou k rotační ose sudu. Pak z rovnosti momentů tíhových sil dna a pláště sudu plyne:

$$\pi\frac{D^2}{4}\cdot h = \pi DH\cdot\left(\frac{H}{2}-h\right).$$

Z rovnosti dostaneme

$$h=\frac{2H^2}{D+4H}=0{,}36\ \mathrm{m}.$$

2 body

b) Práci určíme jako rozdíl potenciálních energií sudu v rovnovážné poloze vratké a v počáteční poloze:

$$W_1 = mg\left(\sqrt{\frac{D^2}{4}+h^2}-\frac{D}{2}\right) = mg\left[\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{4H^4}{(D+4H)^2}}-\frac{D}{2}\right] = 50\ \mathrm{J}.$$

$$W_2 = mg\left(\sqrt{\tfrac{D^2}{4}+(H-h)^2}-\tfrac{D}{2}\right) =$$

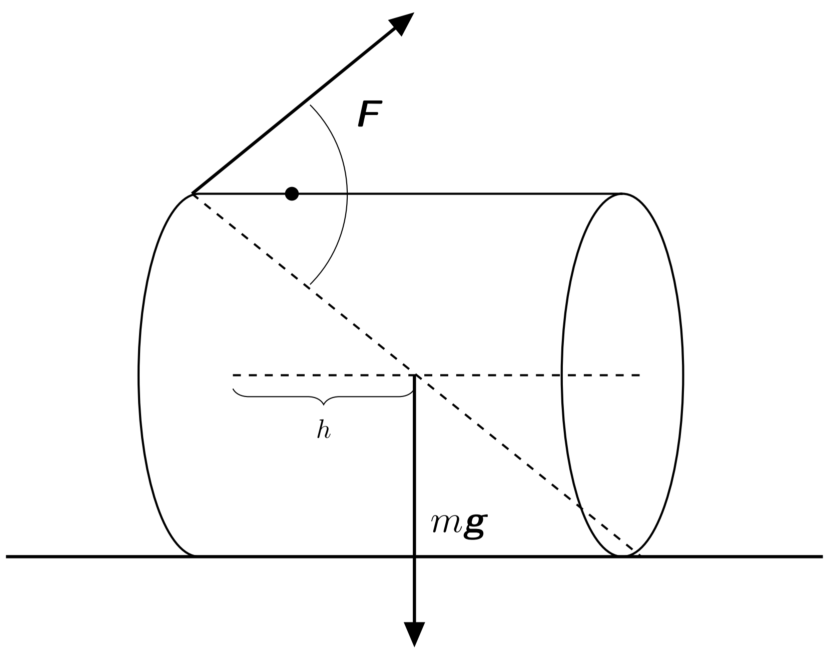
$$= mg\left[\sqrt{\tfrac{D^2}{4}+\left(H-\tfrac{2H^2}{D+4H}\right)^2}-\tfrac{D}{2}\right] =$$

$$= mg\left[\sqrt{\tfrac{D^2}{4}+\left(\tfrac{H(D+2H)}{D+4H}\right)^2}-\tfrac{D}{2}\right] = 80\ \mathrm{J}.$$

4 body

c) Sud je nutné uchopit v nejvzdálenějším bodě od osy otáčení při převracení a silou působit kolmo ke spojnici místa uchopení a bodu dotyku sudu s vodorovnou podlahou (obr. R3). Síla má maximální velikost v počáteční poloze, kdy je též největší moment tíhové síly. Podle momentové věty platí:

$$F\cdot\sqrt{D^2+H^2} = mg\cdot(H-h).$$



Obr. R3

Úpravou dostaneme

$$F = \frac{H-h}{\sqrt{D^2+H^2}} \cdot mg = \frac{H(D+2H)}{(D+4H)\sqrt{D^2+H^2}} \cdot mg = 0{,}47 \cdot mg = 140\ \mathrm{N}.$$

4 body

7.a) Užitím stavové rovnice a následným vyjádřením teplot dostaneme:

1. stroj	2. stroj
$T_A = \dfrac{p_0 V_0}{nR_m} \doteq 120\ \mathrm{K}$	$T_{A'} = \dfrac{2p_0 V_0}{nR_m} \doteq 241\ \mathrm{K}$
$T_B = \dfrac{2p_0 V_0}{nR_m} \doteq 241\ \mathrm{K}$	$T_{B'} = \dfrac{2p_0 V_0}{nR_m} \doteq 241\ \mathrm{K}$
$T_C = \dfrac{6p_0 V_0}{nR_m} \doteq 722\ \mathrm{K}$	$T_{C'} = \dfrac{4p_0 V_0}{nR_m} \doteq 481\ \mathrm{K}$
$T_D = \dfrac{3p_0 V_0}{nR_m} \doteq 361\ \mathrm{K}$	$T_{D'} = \dfrac{4p_0 V_0}{nR_m} \doteq 481\ \mathrm{K}$

1 bod

b) Práci W'_1 vykonanou prvním tepelným strojem během jednoho cyklu dostaneme, když od vykonané práce během izobarického zahřátí W'_{BC} odečteme práci vykonanou vnějšími silami při izobarické kompresi W_{DA}. Pak platí

$$W'_1 = W'_{BC} - W_{DA},$$

kde $W'_{BC} = 4p_0V_0$ a $W_{DA} = 2p_0V_0$. Po dosazení dostaneme

$$W'_1 = W'_{BC} - W_{DA} = 2p_0V_0 = 2{,}00\ \mathrm{kJ}.$$

1 bod

Práci W'_2 vykonanou druhým tepelným strojem během jednoho cyklu dostaneme, když od součtu vykonané práce během izobarického zahřátí $W'_{B'C'}$ a izotermické expanze $W'_{C'D'}$ odečteme součet práce vykonané vnějšími silami při izobarické kompresi $W_{D'A'}$ a izotermické kompresi $W_{A'B'}$. Pak platí

$$W'_2 = W'_{B'C'} + W'_{C'D'} - W_{D'A'} - W_{A'B'},$$

kde $W'_{B'C'} = 2p_0V_0$, $W'_{C'D'} = nR_mT_{C'} \ln \dfrac{4V_0}{2V_0} = 4p_0V_0 \ln 2$, $W_{D'A'} = 2p_0V_0$, $W_{A'B'} = nR_mT_{A'} \ln \dfrac{2V_0}{V_0} = 2p_0V_0 \ln 2$. Po dosazení dostaneme

$$W'_2 = 2p_0V_0 \ln 2 = 1{,}39\ \mathrm{kJ}.$$

2 body

c) Celkové dodané teplo Q_1 během jednoho cyklu prvnímu tepelnému stroji je dáno součtem dodaných tepel při izochorickém zvýšení tlaku Q_{AB} a izobarickém zahřátí Q_{BC}. Pak platí

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC},$$

kde $Q_{AB} = nC_V\left(T_B - T_A\right) = n \cdot \dfrac{3}{2}R_m \dfrac{p_0V_0}{nR_m} = \dfrac{3}{2}p_0V_0$, $Q_{BC} = nC_p\left(T_C - T_B\right) =$ $= n \cdot \dfrac{5}{2}R_m \dfrac{4p_0V_0}{nR_m} = 10p_0V_0$. Po dosazení dostaneme

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC} = \frac{23}{2}p_0V_0 = 11{,}5\ \mathrm{kJ}.$$

2 body

Celkové dodané teplo Q_2 během jednoho cyklu druhému tepelnému stroji je dáno součtem dodaných tepel při izobarickém zahřátí $Q_{B'C'}$ a izotermickém zahřátí $Q_{C'D'}$. Pak platí

$$Q_2 = Q_{B'C'} + Q_{C'D'},$$

kde $Q_{B'C'} = nC_p\left(T_{C'} - T_{B'}\right) = n\cdot\dfrac{5}{2}R_m\dfrac{2p_0V_0}{nR_m} = 5p_0V_0$, $Q_{C'D'} = nR_mT_{C'}\ln\dfrac{4V_0}{2V_0} =$ $= nR_m\dfrac{4p_0V_0}{nR_m}\ln 2 = 4p_0V_0\ln 2$. Po dosazení dostaneme

$$Q_2 = Q_{B'C'} + Q_{C'D'} = p_0V_0\left(5 + 4\ln 2\right) \doteq 7{,}77\ \mathrm{kJ}.$$

2 body

d) Účinnost lze určit jako podíl vykonané práce a dodaného tepla během jednoho cyklu. Pro účinnost prvního tepelného stroje platí

$$\eta_1 = \frac{W_1'}{Q_1} = \frac{2p_0V_0}{\frac{23}{2}p_0V_0} = \frac{4}{23} \doteq 17{,}4\ \%.$$

Pro účinnost druhého tepelného stroje platí

$$\eta_2 = \frac{W_2'}{Q_2} = \frac{2p_0V_0\ln 2}{p_0V_0\left(5 + 4\ln 2\right)} = \frac{2\ln 2}{\left(5 + 4\ln 2\right)} \doteq 17{,}8\ \%.$$

Účinnosti tepelných strojů jsou téměř shodné.

2 body