Řešení úloh školního kola 57. ročníku Fyzikální olympiády

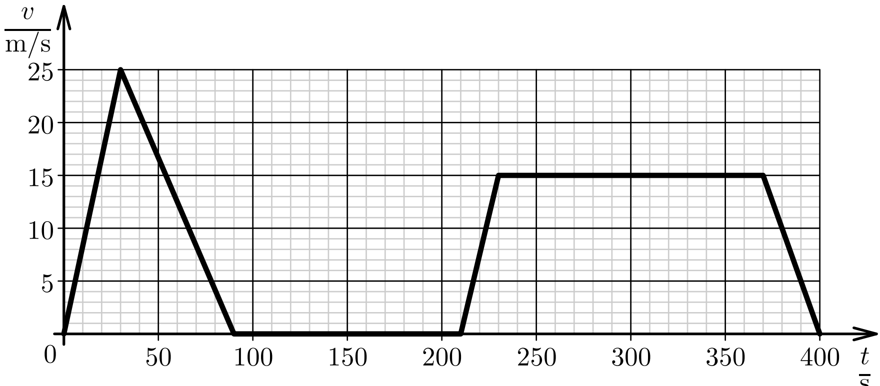
Kategorie G – Archimédiáda

Autoři úloh: D. Kaštilová (1), J. Thomas (2), L. Richterek (3), J. Tesař (4), Ľ. Konrád (5; úloha převzata z FO SR)

1. FO57G1–1: Pat a Mat

a) K sestrojení grafu závislosti rychlosti automobilu na čase (viz obr. 1) nejprve vypočítáme dobu, při níž se automobil pohyboval rovnoměrně $t_5 = \dfrac{s_5}{v_5} = 140\,\mathrm{s}$.

1 bod



Obr. 1: Graf závislosti rychlosti v na čase t pro pohyb Pata a Mata

3 body

b) Dráha automobilu je číselně rovna obsahu plochy pod grafem. Celkovou dráhu určíme jako součet drah automobilu v jednotlivých úsecích.
$s_1 = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot 30\,\mathrm{m} = 375\,\mathrm{m}$, $s_2 = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot 60\,\mathrm{m} = 750\,\mathrm{m}$, $s_3 = 0\,\mathrm{m}$,
$s_4 = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20\,\mathrm{m} = 150\,\mathrm{m}$, $s_5 = 2\,100\,\mathrm{m}$, $s_6 = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 30\,\mathrm{m} = 225\,\mathrm{m}$.

$$s_\mathrm{c} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 = 3\,600\,\mathrm{m},$$
$$t_\mathrm{c} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = 400\,\mathrm{s},$$
$$v_\mathrm{p} = \frac{s_\mathrm{c}}{t_\mathrm{c}} = \frac{3600}{400}\,\mathrm{m/s} = 9\,\mathrm{m/s}.$$

Automobil urazil dráhu $3\,600\,\mathrm{m}$ průměrnou rychlostí $9\,\mathrm{m/s}$. **4 body**

c) $t'_\mathrm{c} = 190\,\mathrm{s}$, $s'_\mathrm{c} = s_4 + s_5 + s_6 = 2\,475\,\mathrm{m}$,

$$v'_\mathrm{p} = \frac{2475}{190}\,\mathrm{m/s} = 13\,\mathrm{m/s}.$$

Při společné jízdě se pohybovali průměrnou rychlostí $13\,\mathrm{m/s}$. **2 body**

2. FO57G1–2: Zlatá cihla

Pro rozměry cihly $a = 29\,\mathrm{cm} = 0{,}29\,\mathrm{m}$, $b = 14\,\mathrm{cm} = 0{,}14\,\mathrm{m}$ a $c = 6{,}5\,\mathrm{cm} = 0{,}065\,\mathrm{m}$ vychází její objem $V = abc = 29\,\mathrm{cm}\cdot 14\,\mathrm{cm}\cdot 6{,}5\,\mathrm{cm} = 2\,639\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}002\,639\,\mathrm{m}^3$.

a) Hmotnost cihly z pálené hlíny vychází $m_1 = \varrho_\mathrm{h} V = 1\,500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}002\,639\,\mathrm{m^3} \doteq$ $\doteq 3{,}96\,\mathrm{kg}$. **2 body**

b) Hmotnost zlaté cihly by byla $m_2 = \varrho_\mathrm{z} V = 19\,300\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}002\,639\,\mathrm{m^3} =$ $= 50{,}933\,\mathrm{kg} \doteq 50{,}9\,\mathrm{kg}$. **1 bod**

c) Největší plocha cihly má obsah $S = 29\,\mathrm{cm} \cdot 14\,\mathrm{cm} = 406\,\mathrm{cm^2} = 0{,}040\,6\,\mathrm{m^2}$. Pro tlak cihly z pálené hlíny p_1 a tlak cihly ze zlata p_2 na podložku dostáváme

$$p_1 = \frac{m_1 g}{S} = \frac{3{,}96\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{0{,}040\,6\,\mathrm{m^2}} \doteq 975\,\mathrm{Pa},$$
$$p_2 = \frac{m_2 g}{S} = \frac{50{,}933\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}}{0{,}040\,6\,\mathrm{m^2}} = 12\,545\,\mathrm{Pa} \doteq 12{,}5\,\mathrm{kPa}.$$

3 body

d) Má-li být hmotnost cihly $10\times$ menší, musí být každý rozměr $\sqrt[3]{10}\times = 2{,}154\,4\times$ menší. Rozměry nové cihly budou

$$a' = \frac{a}{2{,}154\,4} = \frac{29\,\mathrm{cm}}{2{,}154\,4} \doteq 13{,}50\,\mathrm{cm}, \qquad b' = \frac{b}{2{,}154\,4} = \frac{14\,\mathrm{cm}}{2{,}154\,4} \doteq 6{,}50\,\mathrm{cm},$$
$$c' = \frac{c}{2{,}154\,4} = \frac{6{,}5\,\mathrm{cm}}{2{,}154\,4} \doteq 3{,}02\,\mathrm{cm}.$$

Jiný postup: Hmotnost zlaté cihly teď bude $m_2' = 5{,}093\,3\,\mathrm{kg}$. Objem cihly

$$V' = \frac{m_2'}{\varrho_\mathrm{z}} = \frac{5{,}093\,3\,\mathrm{kg}}{19\,300\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}000\,263\,9\,\mathrm{m^3} = 263{,}9\,\mathrm{cm^3}.$$

Rozměry cihly mají být v poměru $29 : 14 : 6{,}5 = 4{,}462 : 2{,}154 : 1$. Rozměry cihly tak můžeme zapsat ve tvaru $a' = x \cdot 4{,}462\,\mathrm{cm}$, $b' = x \cdot 2{,}154\,\mathrm{cm}$ a $c' = x \cdot 1{,}000\,\mathrm{cm}$, kde x je neznámý koeficient. Pro objem cihly pak vychází rovnice

$$V' = a'b'c' = 4{,}462\,\mathrm{cm} \cdot 2{,}154\,\mathrm{cm} \cdot 1{,}000\,\mathrm{cm} \cdot x^3 = x^3 \cdot 9{,}609\,5\,\mathrm{cm^3} = 263{,}9\,\mathrm{cm^3};$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{263{,}9\,\mathrm{cm^3}}{9{,}609\,5\,\mathrm{cm^3}}} = \sqrt[3]{27{,}462} = 3{,}017.$$

Pro rozměry cihly pak dostáváme

$$a' = 3{,}017 \cdot 4{,}462\,\mathrm{cm} \doteq 13{,}50\,\mathrm{cm}, \qquad b' = 3{,}017 \cdot 2{,}154\,\mathrm{cm} \doteq 6{,}50\,\mathrm{cm},$$
$$c' = 3{,}017 \cdot 1{,}000\,\mathrm{cm} \doteq 3{,}02\,\mathrm{cm}.$$

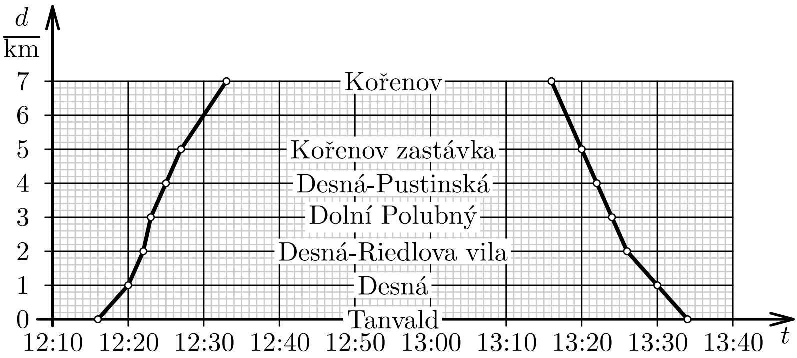
4 body

3. FO57G1–3: Na trati Tanvald – Kořenov

a) Graf je na obr. 2. **3 body**

b) Vzdálenost mezi stanicemi Tanvald a Kořenov je $s = 7\,\mathrm{km}$. Jízda z Tanvaldu do Kořenova trvá dobu $t_1 = 33\,\mathrm{min} - 16\,\mathrm{min} = 17\,\mathrm{min} = 17/60\,\mathrm{h}$, cesta opačným směrem dobu $t_2 = 34\,\mathrm{min} - 16\,\mathrm{min} = 18\,\mathrm{min} = 18/60\,\mathrm{h}$. Pro průměrné rychlosti pak vychází

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{7\,\mathrm{km}}{17/60\,\mathrm{h}} = 24{,}7\,\mathrm{km/h}, \qquad v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{7\,\mathrm{km}}{18/60\,\mathrm{h}} = 23{,}3\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**



Obr. 2: Graf závislosti vzdálenosti od Tanvaldu d na čase t pro oba spoje

c) Z grafu vidíme, že závislost vzdálenosti d na čase t ve směru do Kořenova roste nejstrměji mezi stanicemi Desná-Riedlova vila a Dolní Polubný, kdy vzdálenost $s_1 = 1\,\mathrm{km}$ vlak urazí za čas $t_3 = 1\,\mathrm{min} = 1/60\,\mathrm{h}$. Průměrná rychlost v tomto úseku vychází

$$v_{\mathrm{max1}} = \frac{s_1}{t_3} = \frac{1\,\mathrm{km}}{1/60\,\mathrm{h}} = 60\,\mathrm{km/h}.$$

Naopak nejpomaleji roste v prvním úseku z Tanvaldu do Desné, kdy stejnou vzdálenost s_1 ujede za $t_4 = 4\,\mathrm{min} = 1/15\,\mathrm{h}$, tj. za $4\times$ delší dobu. Průměrná rychlost musí být $4\times$ menší, neboli

$$v_{\mathrm{min1}} = \frac{s_1}{t_4} = \frac{1\,\mathrm{km}}{1/15\,\mathrm{h}} = 15\,\mathrm{km/h}.$$

Ve směru do Tanvaldu je průměrná rychlost v úseku Kořenov – Desná-Riedlova vila stejná, pokud vybereme např. opět část Dolní Polubný – Desná-Riedlova vila, kterou urazí za $t_3 = 2\,\mathrm{min} = 1/30\,\mathrm{h}$, dostáváme

$$v_{\mathrm{max2}} = \frac{s_1}{t_5} = \frac{1\,\mathrm{km}}{1/30\,\mathrm{h}} = 30\,\mathrm{km/h}.$$

Ve zbývajících dvou úsecích do Tanvaldu je rychlost mezi stanicemi také stejná, úsek Desná–Tanvald vlak ujede za $t_4 = 4\,\mathrm{min} = 1/15\,\mathrm{h}$ stejně jako v opačném směru, pro rychlost v tomto úseku proto opět vychází

$$v_{\mathrm{min2}} = v_{\mathrm{min1}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{1/15\,\mathrm{h}} = 15\,\mathrm{km/h}.$$ **4 body**

d) Nadmořská výška stanice Tanvald je 468 m.n.m., stanice Kořenov 695 m.n.m. (viz např. `http://www.vlakregion.cz/trate/036/036.html`). Ve směru z Tanvaldu do Kořenova musí vlak nastoupat převýšení 695 m.n.m. − 468 m.n.m. = = 227 m.n.m. Z bezpečnostních důvodů je průměrná rychlost při klesání (směrem z Kořenova do Tanvaldu) o něco nižší, v minulosti bylo zaznamenáno několik případů, kdy se při vyšší rychlosti při klesání nepodařilo v některých stanicích zastavit. **1 bod**

Poznámka: Některé zdroje uvádějí převýšení na trati 230 m nebo 235 m, všechny údaje okolo 230 m doporučujeme uznat za správné. Dodejme, že údaje v jízdním řádu jsou zaokrouhleny na celé kilometry a celé minuty, vypočtené hodnoty jsou proto přibližným odhadem.

4. FO57G1–4: Dešťové srážky

a) Obsah záhonku je $S_1 = 1\,\mathrm{m}^2$, výška vodní vrstvy (pokud by se nevypařila a nevsákla do půdy) $h_1 = 15\,\mathrm{mm} = 0{,}015\,\mathrm{m}$. Objem srážek, který připadá na plochu záhonku je $V_1 = S_1 h_1 = 1\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}015\,\mathrm{m} = 0{,}015\,\mathrm{m}^3 = 15\,\mathrm{l}$. **2 body**

b) Obsah fotbalového hřiště vychází $S_2 = 100\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{m} = 7\,000\,\mathrm{m}^2$, výška vodní vrstvy $h_2 = 200\,\mathrm{mm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Pro objem srážek, který připadá na plochu hřiště, dostáváme $V_2 = S_2 h_2 = 7\,000\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} = 1\,400\,\mathrm{m}^3$. Je-li objem jednoho kropicího vozu $V' = 8\,\mathrm{m}^3$, naplnilo by se celkem $n = V_2/V' = 1\,400\,\mathrm{m}^3/\left(8\,\mathrm{m}^3\right) = 175$ cisteren kropicích vozů. **2 body**

c) Plocha záhonu je v tomto případě $S_3 = 1\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}^2$, výška vodní vrstvy $h_3 = 6\,\mathrm{mm} = 0{,}006\,\mathrm{m}$. Na záhonek dopadl objem $V_3 = S_3 h_3 = 3\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}006\,\mathrm{m} = 0{,}018\,\mathrm{m}^3 = 18\,\mathrm{l}$, tedy $2\times$ více, než při zalévání konví o objemu 9 l. **3 body**

d) Pro jednoduchost uvažujme opět plochu $S_1 = 1\,\mathrm{m}^2$ jako v případě a), výška sněhové vrstvy byla $h_4 = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Pro objem sněhu na této ploše získáváme $V_4 = S_1 h_4 = 1\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} = 0{,}2\,\mathrm{m}^3$, hmotnost sněhu při hustotě $\varrho_\mathrm{s} = 100\,\mathrm{kg/m}^3$ vychází $m = V_4 \varrho_\mathrm{s} = 0{,}2\,\mathrm{m}^3 \cdot 100\,\mathrm{kg/m}^3 = 20\,\mathrm{kg}$. Hmotnost se při roztátí sněhu nezmění; při hustotě vody $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m}^3$ dostáváme objem vody $V_\mathrm{v} = 20\,\mathrm{kg}/\left(1\,000\,\mathrm{kg/m}^3\right) = 0{,}020\,\mathrm{m}^3$, který odpovídá výšce $h'_4 = 0{,}02\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{mm}$.

K výsledku lze dospět i úvahou – porovnáním hustot sněhu a vody. Při $10\times$ větší hustotě vody musí vyjít $10\times$ nižší vrstva vody. **3 body**

5. FO57G1–5: Experimentální úloha: těžiště

d) Geografický střed ČR se oficiálně nachází nedaleko obce Číhošť, která leží blízko Ledče nad Sázavou v okrese Havlíčkův Brod (viz např. Wikipedie, Mapy.cz, obr. 3). Poloha těžiště našeho modelu by měla také odpovídat poloze této obce. Geografické souřadnice místa jsou 49°44′38″ severní šířky a 15°20′19″ východní délky.

Za úlohu včetně experimentu celkem **10 bodů**

Obr. 3: Geografický střed ČR (pamětní kámen z roku 2006)