Řešení úloh 1. kola 58. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 5, 6, 7), J. Jírů (2, 3, 4)

1. a) Napíšeme si pohybové rovnice, ze kterých vyjádříme dobu jízdy a zrychlení automobilu A:

$$v = v_0 - at \text{ a } s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}(v_0 - v)\,t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v_0 + v} = 5{,}57\ \text{s}.$$

$$a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{v_0^2 - v^2}{2s} = 7{,}47\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

2 body

b) Maximální velikost zrychlení automobilu, nemají-li kola prokluzovat, je $a = fg$. Automobil se bude rozjíždět po dobu $t = \dfrac{v_0}{a} = \dfrac{v_0}{fg} = 9{,}30$ s. Přitom ujede vzdálenost $s = \dfrac{v_0^2}{2a} = \dfrac{v_0^2}{2fg} = 297$ m. K dosažení rychlosti v_0 za čas t je zapotřebí průměrný výkon

$$P = \frac{mv_0^2}{2t} = \frac{mfgv_0}{2} = 143\ \text{kW}.$$

Protože zrychlení automobilu je stálé, roste výkon motoru lineárně. Maximální hodnota výkonu $P_{\max} = mfgv_0 = 285$ kW. Maximální výkon motoru se tedy při rozjíždění na zvyšování rychlosti nevyužije.

3 body

c) Hodnoty tabulky přeneseme do EXCELu a sestrojíme graf. Z rovnice regrese vidíme, že závislost rychlosti na čase je kvadratická $v = 0{,}09t^2 - 4{,}45t + {}$ $+55{,}6$. Stejnou rychlost budou automobily mít za dobu t_1, pro kterou platí

$$v_A = 0{,}09t_1^2 - 4{,}45\text{t}_1 + 55{,}6 = 50 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1{,}3\ \text{s}.$$

Dráha automobilu B pak bude záviset na času podle vztahu

$$s_B = \int_0^{t_2} \left(0{,}09t^2 - 4{,}45t + 55{,}6\right) \text{d}t = 0{,}03t_2^3 - 2{,}22{t_2}^2 + 55{,}6t_2.$$

Automobil A urazí stejnou dráhu jako automobil B, takže

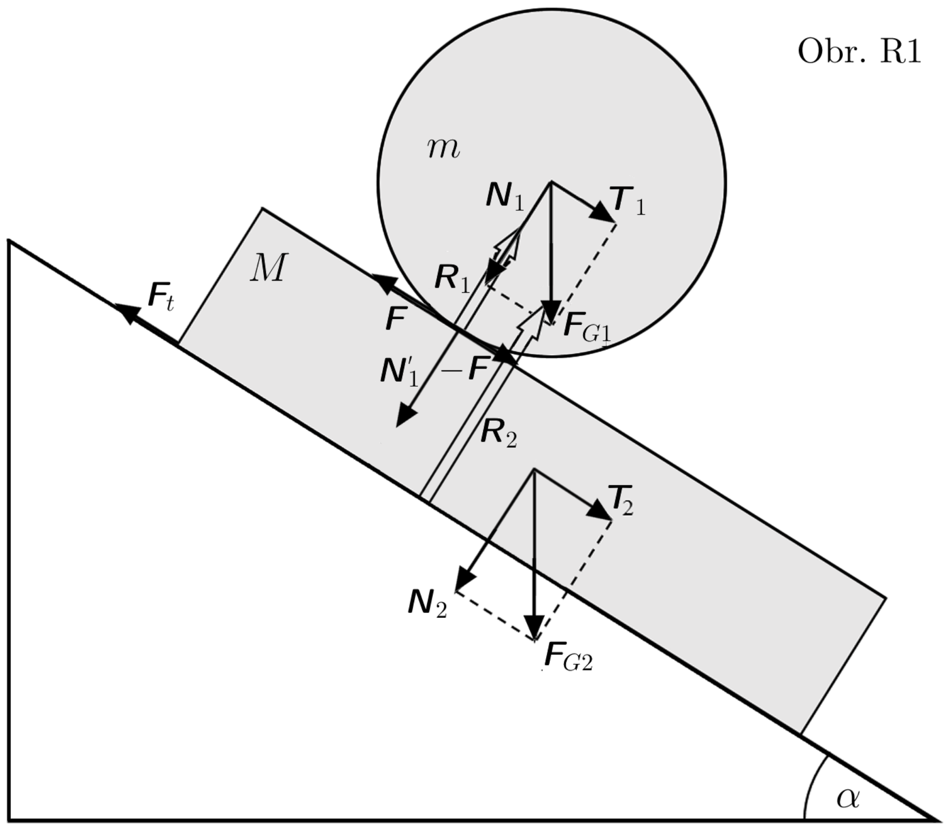
$$v_A \cdot t_2 = s_B \quad \Rightarrow \quad 50t_2 = 0{,}03t_2^3 - 2{,}22{t_2}^2 + 55{,}6t_2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 50 = 0{,}03t_2^2 - 2{,}22t_2 + 55{,}6 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 0{,}03t_2^2 - 2{,}22t_2 + 5{,}6 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 2{,}6\ \text{s}$$

Automobil A předjede automobil B za dobu $t_2 = 2{,}6$ s ve vzdálenosti $s_B =$ $= v_A \cdot t_2 = 130$ m od začátku cílové rovinky.

V okamžiku, kdy automobil A předjíždí automobil B má automobil B rychlost

$$v_B = 0{,}09t_2^2 - 4{,}45t_2 + 55{,}6 = 45\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

5 bodů



Obr. R1

2.a) Na válec působí jeho tíhová síla

$$\boldsymbol{F}_{G1} = m\boldsymbol{g} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_1,$$

kde $\boldsymbol{T}_1$ je její tečná složka (ve směru nakloněné roviny) a $\boldsymbol{N}_1$ její normálová složka (kolmá k nakloněné rovině), dále reakce kvádru $\boldsymbol{R}_1 = -\boldsymbol{N}_1$ a vlivem tření v tečném směru síla $\boldsymbol{F}$. Výslednice těchto sil určuje zrychlení válce podle pohybové rovnice

$$ma_1 = T_1 - F = mg\sin\alpha - F. \tag{1}$$

Na kvádr působí jeho tíhová síla

$$\boldsymbol{F}_{G2} = M\boldsymbol{g} = \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{T}_2,$$

kde $\boldsymbol{T}_2$ je její tečná složka a $\boldsymbol{N}_2$ její normálová složka, válec silami $\boldsymbol{N}_1'$ a $-\boldsymbol{F}$, reakce nakloněné roviny $\boldsymbol{R}_2 = -\boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{N}_2$ a třecí síla $\boldsymbol{F}_t$ proti pohybu kvádru. Výslednice těchto sil za předpokladu $T_2 + F \geq F_t$ určuje zrychlení kvádru podle pohybové rovnice

$$Ma_2 = T_2 - F_t + F = Mg\sin\alpha - f\,(M+m)\,g\cos\alpha + F.$$

Velikost síly F určíme z podmínky o neprokluzování válce

$$F = \frac{J\varepsilon}{r} = \frac{\frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{a_1 - a_2}{r}}{r} = \frac{1}{2}m\,(a_1 - a_2)\,. \tag{2}$$

Po dosazení do pohybových rovnic a úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$-ma_2 + 3ma_1 = 2mg\sin\alpha,$$
$$\left(M + \frac{m}{2}\right)a_2 - \frac{m}{2}a_1 = Mg\sin\alpha - f\,(M+m)\,g\cos\alpha.$$

Ze soustavy rovnic plyne

$$a_1 = g\sin\alpha - \frac{M+m}{3M+m} fg\cos\alpha, \tag{3}$$

$$a_2 = g\sin\alpha - \frac{M+m}{M+\frac{m}{3}} fg\cos\alpha. \tag{4}$$

4 body

Za předpokladu $T_2 + F \leq F_t$ se kvádr naopak nerozjede, velikost jeho zrychlení je

$$a_2 = 0. \tag{5}$$

Z rovnic (1) a (2) pak pro velikost zrychlení válce plyne

$$a_1 = \frac{2}{3} g\sin\alpha. \tag{6}$$

2 body

Hraniční podmínku pro sklon nakloněné roviny mezi klidem a pohybem kvádru získáme ze vztahu (4), v němž položíme $a_2 = 0$:

$$\mathrm{tg}\alpha = f\frac{M+m}{M+\dfrac{m}{3}}, \text{ resp. } f = \frac{M+\dfrac{m}{3}}{M+m}\mathrm{tg}\alpha. \tag{7}$$

1 bod

Číselně hraniční podmínka (7) nastane pro $\alpha = 22°$. Pro $\alpha_1 = 15°$ dostaneme z rovnic (5) a (6) $a_1 = 1{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2 = 0$, pro $\alpha_2 = 40°$ z rovnic (3) a (4) $a_1 = 5{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2 = 3{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. **1 bod**

b) Aby válec neprokluzoval, musí minimální součinitel smykového tření mezi válcem a podložkou splňovat podmínku

$$F = \frac{1}{2} m\left(a_1 - a_2\right) = f_{\min} mg\cos\alpha,$$

z níž plyne

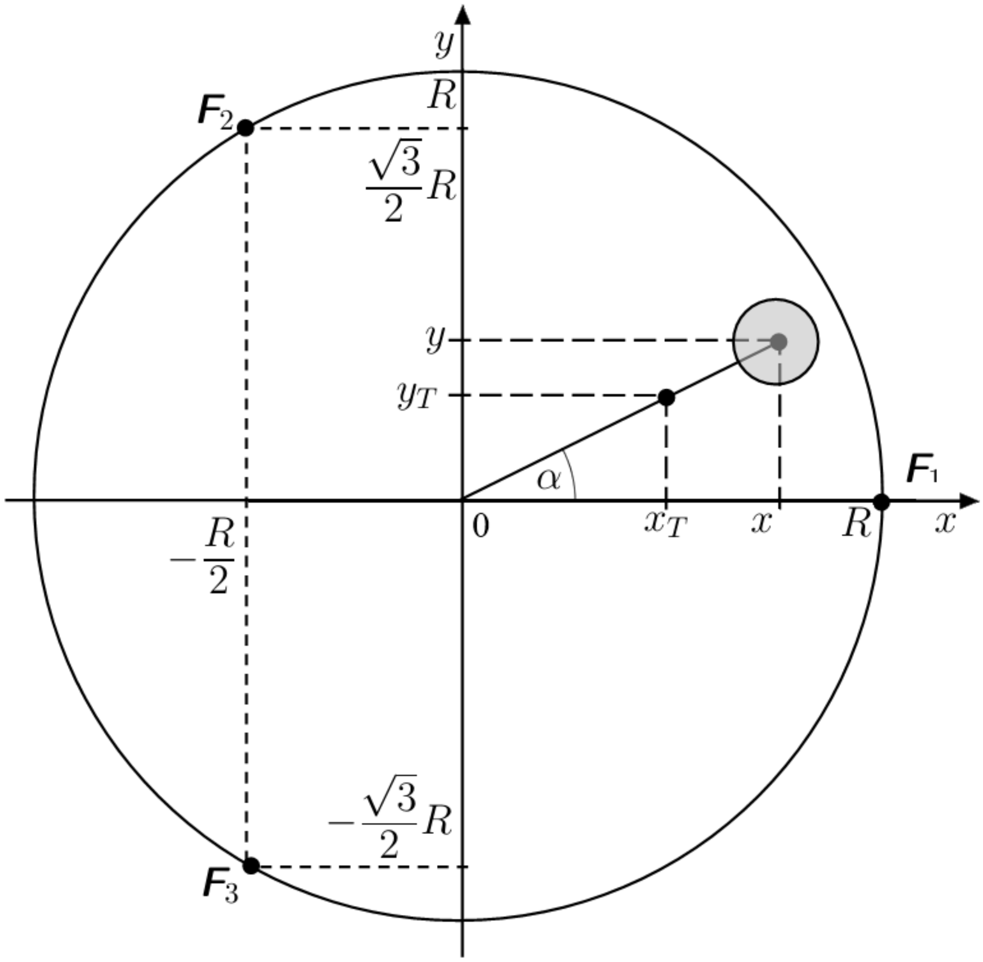
$$f_{\min} = f\frac{M+m}{3M+m} = \frac{4}{9} f = 0{,}13.$$

2 body

3.a) Označme F_1, F_2, F_3 velikosti napínajících sil odpovídající postupně frekvencím f_1, f_2, f_3 a zvolme jejich působiště v soustavě souřadnic $0xy$ podle obr. 2. Bez ohledu na umístění působišť sil po obvodu zvolme polohu válce s těžištěm například v 1. kvadrantu a označme x, y jeho hledané souřadnice. Na spojnici se středem desky pak leží společné těžiště desky a válce, označme jeho souřadnice x_T, y_T. Pro velikosti sil platí $F_1 : F_2 : F_3 = f_1^2 : f_2^2 : f_3^2 = 16 : 25 : 36$, tedy

$$F_2 = \frac{25}{16} F_1,\ F_3 = \frac{9}{4} F_1.$$

1 bod



Obr. R2

Z podmínky rovnováhy podle osy y a podle osy x platí

$$(F_1 + F_2 + F_3)\, x_T = F_1 R - F_2 \frac{1}{2} R - F_3 \frac{1}{2} R,$$

$$(F_1 + F_2 + F_3)\, y_T = F_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R - F_3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

2 body

Z rovnic plyne

$$x_T = \frac{F_1 - \frac{1}{2}F_2 - \frac{1}{2}F_3}{F_1 + F_2 + F_3} R = \frac{1 - \frac{25}{32} - \frac{36}{32}}{1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4}} R = -\frac{29}{154} R = -0{,}188\,3R,$$

$$y_T = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}F_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_3}{F_1 + F_2 + F_3} R = \frac{\frac{25\sqrt{3}}{32} - \frac{36\sqrt{3}}{32}}{1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4}} R = -\frac{\sqrt{3}}{14} R = -0{,}123\,7R.$$

Těžiště soustavy se nachází v 3. kvadrantu. Výhodně v polárních souřadnicích vychází

$$r_T = \sqrt{x_T^2 + y_T^2} = 0{,}2253R,$$

$$\alpha_T = \pi + \mathrm{arctg}\frac{y_T}{x_T} = \pi + \mathrm{arctg}\frac{11\sqrt{3}}{29} = 1{,}185\pi \text{ rad} = 213°.$$

2 body

Těžiště válce má v závislosti na hmotnosti m polární souřadnice

$$r = \frac{M+m}{m} r_T,\ \alpha = \alpha_T = 213°, \tag{1}$$

event. kartézské souřadnice

$$x = \frac{M+m}{m} x_T,\ y = \frac{M+m}{m} y_T.$$

1 bod

Poloha válce je $r \leq R$. Čím blíže je válec obvodu desky, tím menší hmotnost válce je zapotřebí. Nejmenší hmotnost $m_{\min}$ bude pro $r = R$:

$$m_{\min} = \frac{r_T}{R - r_T} M = \frac{0,2253}{1 - 0{,}2253} M = 0{,}291M.$$

1 bod

Při maximální hmotnosti $m_{\max}$ válce budou struny napínány nejvíce. Největší síla je $\boldsymbol{F}_3$, její velikost bude podle zadání $1{,}80Mg$. Proto platí

$$F_3 = \frac{9}{4} F_1 = 1{,}8Mg,$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = \frac{77}{16} F_1 = (M + m_{\max})\, g.$$

Z rovnic plyne

$$m_{\max} = \frac{57}{20} M = 2{,}85M.$$

1 bod

Podle rovnice (1) je odpovídající minimální vzdálenost

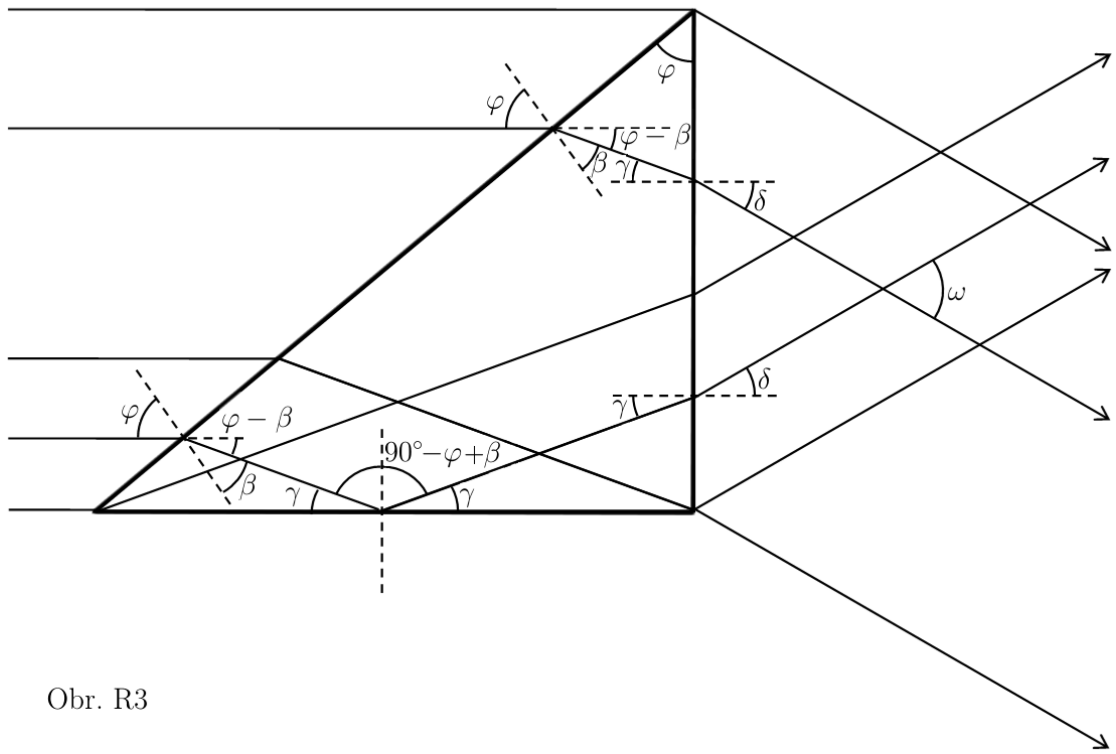
$$r_{\min} = \frac{M + m_{\max}}{m_{\max}} r_T = \frac{M + \frac{57}{20}M}{\frac{57}{20}M} r_T = \frac{77}{57} r_T = \frac{77}{57} \cdot 0{,}225\ 3R = 0{,}304R.$$

1 bod

Všechny možné hmotnosti válce splňují podmínku $m \in \langle 0{,}291M;\ 2{,}85M \rangle$. Těžiště válce se může nacházet v intervalu vzdáleností $r \in \langle 0,304R;\ R \rangle$ od středu kruhové desky a vzhledem k symetrii zavěšení může radiála obsahující průmět těžiště soustavy svírat s radiálou procházející libovolným bodem zavěšení úhel $\alpha = \pm 27°$. **1 bod**

4. Hledáme vztah mezi úhlem φ a úhlem lomu δ při výstupu paprsku z hranolu. Úhel φ je současně úhlem dopadu při prvním lomu a platí pro něj:

$$\sin\varphi = n \sin\beta = n \sin(\varphi - \gamma) = n\,(\sin\varphi \cos\gamma - \cos\varphi \sin\gamma)\,.$$



Obr. R3

Horní část svazku paprsků dopadá dále na svislou stěnu hranolu, zbývající dolní část na jeho vodorovnou stěnu. Pro horní část paprsků při druhém lomu platí:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\delta}{n},\ \cos\gamma = \sqrt{1-\frac{\sin^2\delta}{n^2}}.$$

Dosazením postupně dostaneme

$$\sin\varphi = n\left(\sin\varphi\sqrt{1-\frac{\sin^2\delta}{n^2}} - \cos\varphi\frac{\sin\delta}{n}\right) = \sin\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\delta} - \cos\varphi\sin\delta,$$

neboli

$$\sin\varphi\left(1-\sqrt{n^2-\sin^2\delta}\right) = -\cos\varphi\sin\delta.$$

Z rovnice plyne

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\delta}{\sqrt{\mathrm{n}^2-\sin^2\delta}-1}. \tag{1}$$

5 bodů

Dolní část svazku paprsků dopadá na vodorovnou stěnu hranolu pod úhlem $90° - \gamma$. V případě úplného odrazu dopadají paprsky odražené od vodorovné stěny na svislou stěnu pod úhlem $\varphi - \beta = \gamma$, tudíž úhel lomu je též δ jako u horního svazku paprsků. Jelikož jsou konečné úhly lomu horního a dolního svazku orientovány proti sobě, musí dle zadání splňovat podmínku $2\delta = \omega = 60°$.

Ještě je nutné rozhodnout, zda dojde k lomu, nebo k úplnému odrazu. Porovnáme siny mezního úhlu α_m a úhlu dopadu $90° - \gamma$:

$\sin\alpha_m = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$,

$\sin(90° - \gamma) = \cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\delta}{n^2}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Z porovnání plyne, že nastane úplný odraz. Odražené paprsky dopadají na svislou stěnu pod úhlem $\varphi - \beta = \gamma$, tudíž úhel lomu je též δ jako u horních paprsků.

3 body

Případně obecné řešení podle vztahu (1) pak má tvar

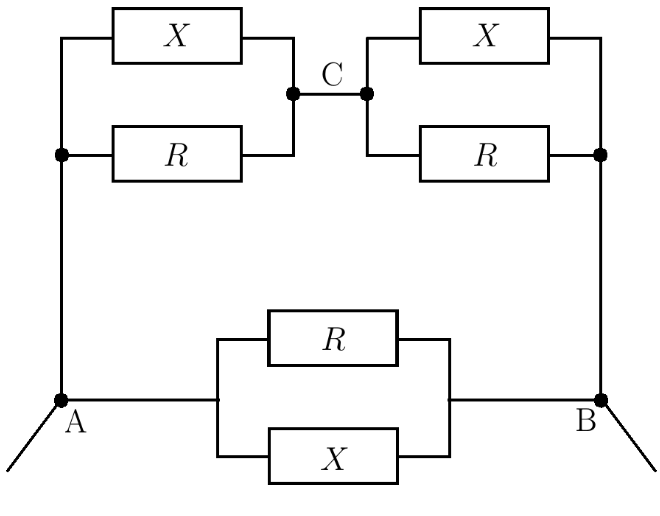
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\frac{\omega}{2}} - 1}.$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 50°.$$

2 body

5. a) Protože těžiště trojúhelníku je ve stejném bodě, jako střed kružnice, má vodič o délce poloměru kružnice odpor $R\frac{\sqrt{3}}{3}$. Vodič o délce třetiny obvodu kružnice pak má odpor $X = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{9}$. Překreslíme schéma:



Obr. R4

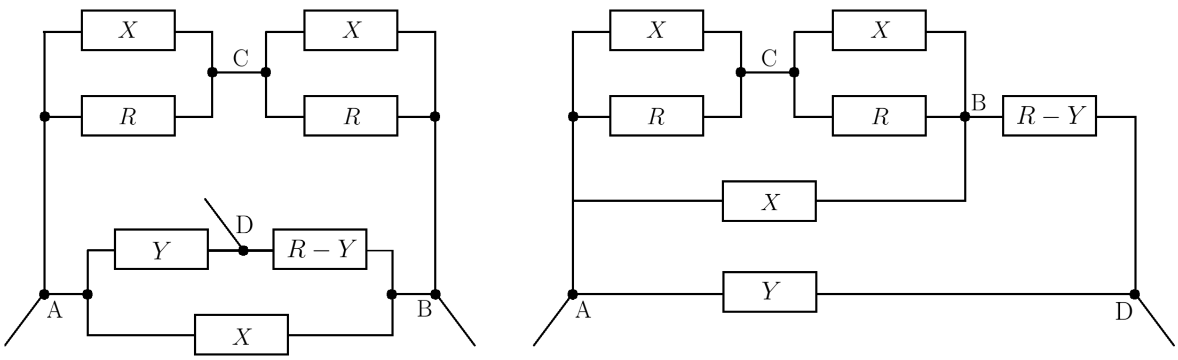
Odpor mezi body A a B pak bude

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X} + \frac{1}{\frac{2RX}{R+X}} = \frac{R+X}{RX} + \frac{R+X}{2RX} = \frac{3\,(R+X)}{2RX} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R_{AB} = \frac{2RX}{3\,(R+X)} = \frac{2R\frac{2\pi R\sqrt{3}}{9}}{3\left(R + \frac{2\pi R\sqrt{3}}{9}\right)} = \frac{4\pi R\sqrt{3}}{27 + 6\pi\sqrt{3}} = 0{,}365R.$$

5 bodů

b) Je-li odpor vodiče o délce $a = \overline{AB}$ roven R, pak odpor části AD je $Y = \dfrac{xR}{a}$ a odpor části DB je $R - Y = \dfrac{(a-x)\,R}{a}$. Překreslíme schéma:



Obr. R5

Odpor mezi body A a D pak bude

$$\frac{1}{R_{AD}} = \frac{1}{Y} + \frac{1}{R - Y + R_{AB}}.$$

Vyjádříme odpor mezi body AB:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{X} + \frac{1}{\dfrac{2RX}{R+X}} = \frac{1}{X} + \frac{R+X}{2RX} = \frac{3R+X}{2RX}.$$

$$R_{AB} = \frac{2RX}{3R+X}.$$

Pak pro odpor mezi body A a D platí:

$$\frac{1}{R_{AD}} = \frac{1}{Y} + \frac{1}{R - Y + \dfrac{2RX}{3R+X}} = \frac{1}{Y} + \frac{3R+X}{(R-Y)\,(3R+X) + 2RX} =$$

$$= \frac{(R-Y)\,(3R+X) + 2RX + (3R+X)\,Y}{[(R-Y)\,(3R+X) + 2RX]\,Y} \quad \Rightarrow$$

$$R_{AD} = \frac{\left(3R^2 + 3RX\right)Y - (3R+X)\,Y^2}{3R^2 + 3RX} = Y - \frac{3R+X}{3\left(R^2 + RX\right)}Y^2$$

Grafem kvadratické funkce $R = Y - aY^2 = Y\,(1 - aY)$ je parabola, která protíná osu R_{AD} v bodech o souřadnicích $Y = 0$ a $Y = \dfrac{1}{a}$, její maximum (vrchol paraboly) má souřadnici

$$Y_{max} = \frac{0 + \frac{1}{a}}{2} = \frac{1}{2a} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R^2 + RX}{3R+X} = \frac{3\left(R^2 + \dfrac{2\pi R^2\sqrt{3}}{9}\right)}{2\left(3R + \dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{9}\right)} =$$

$$= \frac{3\left(9 + 2\pi\sqrt{3}\right)}{54 + 4\pi\sqrt{3}} R = 0{,}79R.$$

Vzdálenost bodu D od bodu A je tedy $x = 0{,}79a$, kde a je délka strany rovnostranného trojúhelníku.

5 bodů

Maximum můžeme najít také jako extrém funkce pomocí derivace: R_{AD} bude maximální, jestliže

$$\frac{\mathrm{d}R_{AD}}{\mathrm{d}Y} = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3R + X}{R^2 + RX} \cdot Y = 0.$$

$$Y = \frac{3}{2} \cdot \frac{R^2 + RX}{3R + X} = \frac{3\left(R^2 + \frac{2\pi R^2\sqrt{3}}{9}\right)}{2\left(3R + \frac{2\pi R\sqrt{3}}{9}\right)} = \frac{3\left(9 + 2\pi\sqrt{3}\right)}{54 + 4\pi\sqrt{3}} R = 0{,}79R.$$

Protože druhá derivace je záporná, jde skutečně o maximum.

6. Odvození vztahu pro ohniskovou vzdálenost:

Před posunutím stínítka platí: $Z_1 = -\frac{a'_1 + d - f}{f}$.

Po posunutí stínítka platí: $Z_2 = -\frac{a'_1 - f}{f}$.

$$Z_1 - Z_2 = \frac{d}{f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{d}{Z_1 - Z_2} = \frac{dx}{y - y'}$$

Příklady naměřených hodnot (ve všech měřeních $x = 20$ mm):

Čočka	$\frac{y}{\mathrm{mm}}$	$\frac{y'}{\mathrm{mm}}$	$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	$\frac{f_i}{\mathrm{mm}}$
1	63	50	70	108
1	100	50	250	100
1	85	50	190	109
1	70	50	98	98
1	130	50	390	97,5

Ohnisková vzdálenost první čočky je $f_1 = (103 \pm 5)$ mm s relativní odchylkou 5 %.

Čočka	$\frac{y}{\mathrm{mm}}$	$\frac{y'}{\mathrm{mm}}$	$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	$\frac{f_i}{\mathrm{mm}}$
2	32	20	28	47
2	40	20	50	50
2	55	20	90	51
2	110	20	220	49
2	52	20	80	50

Ohnisková vzdálenost druhé čočky je $f_2 = (49 \pm 2)$ mm s relativní odchylkou 3 %.

Čočka	$\frac{y}{\text{mm}}$	$\frac{y'}{\text{mm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{f_i}{\text{mm}}$
3	30	25	35	140
3	33	25	62	155
3	35	25	75	150
3	37	25	95	158
3	47	25	180	164

Ohnisková vzdálenost třetí čočky je $f_3 = (154 \pm 9)$ mm s relativní odchylkou 6 %.

7. a) Okamžitý výkon všech sil působících na míček závisí na jeho okamžité rychlosti

$$P = mgv - kv^2.$$

Přitom urychlující síla zvětšuje kinetickou energii míčku a její výkon je kladný, brzdící síla zmenšuje kinetickou energii míčku a její výkon je záporný.
Během pádu míčku se síly, které na míček působí, vyrovnají. Míček se dál bude pohybovat rovnoměrně rychlostí v_2, kterou dopadne na zem. Pak

$$mg - kv_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{v_2}.$$

2 body

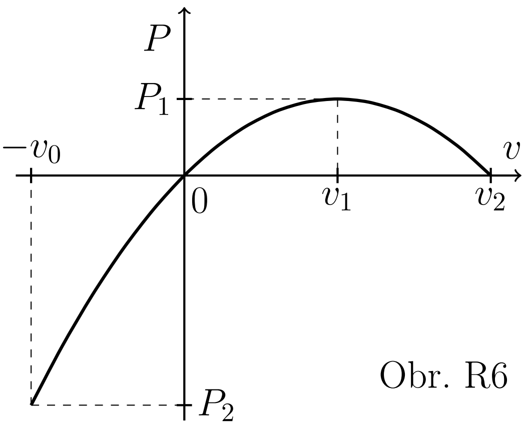
Během pohybu se rychlost míčku mění z rychlosti $-v_0$ na rychlost v_2. Vztah pro výkon můžeme upravit na tvar

$$P = mgv - kv^2 = -k\left[v^2 - \frac{mgv}{k}\right] = -k\left[\left(v - \frac{mg}{2k}\right)^2 - \left(\frac{mg}{2k}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{(mg)^2}{4k} - k\left(v - \frac{mg}{2k}\right)^2 = -\frac{mg}{v_2}\left(v - \frac{v_2}{2}\right)^2 + \frac{mgv_2}{4}.$$

Grafem závislosti výkonu na rychlosti je parabola (obr. R6). Vrchol paraboly odpovídá rychlosti $v_1 = \frac{v_2}{2}$.

3 body



Obr. R6

b) Z grafu je vidět, že maximální rychlost změny kinetické energie může nastat buď pro rychlost míčku $v = v_1$ nebo pro rychlost míčku $v = -v_0$.

Tomu odpovídají výkony $P_1 = \frac{mgv_2}{4}$ (E_k roste) a

$$P_2 = \frac{(mg)^2}{4k} - k\left(-v_0 - \frac{mg}{2k}\right)^2 = \frac{(mg)^2}{4k} - k\left(v_0 + \frac{mg}{2k}\right)^2 =$$

$$= -mgv_0\frac{v_2 + v_0}{v_2} \ \ (E_\mathrm{k} \text{ klesá}).$$

Protože $P_2 < 0$, je $|P_2| = k\left(v_0 + \frac{mg}{2k}\right)^2 - \frac{(mg)^2}{4k} = mgv_0\frac{v_2 + v_0}{v_2}$,

$$P_1 = \frac{mgv_2}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad |P_1| = P_1 = \frac{mgv_2}{4}.$$

Porovnáme výkony P_1 a P_2 a najdeme, při jaké velikosti rychlosti v_0 bude platit

$$|P_2| > |P_1|$$

$$mgv_0\frac{v_2 + v_0}{v_2} > \frac{mgv_2}{4}$$

$$4v_0^2 + 4v_2v_0 - v_2^2 > 0 \text{ pro } v_0 > 0, v_0 > \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)v_2}{2}.$$

Tedy pro $v_0 < \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)v_2}{2}$ je $P_1 > |P_2|$, proto $v_m = v_1 = \frac{v_2}{2}$; pro $v_0 > \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)v_2}{2}$ je $P_1 < |P_2|$ a $v_m = v_0$. Pro $v_0 = \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)v_2}{2}$ platí obě řešení. **5 bodů**