Řešení úloh krajského kola 58. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 4), J. Jírů (3)

1. a) Jestliže první kulička má hmotnost m, pak druhá kulička má hmotnost $(1-k)\cdot m$, třetí kulička má hmotnost $(1-k)^2 \cdot m$, n-tá kulička má hmotnost $(1-k)^{n-1} \cdot m$, kde $k = 0{,}02$.

Při všech srážkách platí zákon zachování hybnosti i zákon zachování mechanické energie. Při první srážce tedy platí

$$mv_1 = mu + (1-k)\,mv_2 \quad \text{a} \quad \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{(1-k)\,mv_2^2}{2},$$

kde u je rychlost první kuličky po srážce a v_2 rychlost druhé kuličky po srážce. Vyjádříme-li z těchto rovnic u a v_2, dostáváme

$$u = \frac{k}{2-k}v_1 > 0 \quad \text{a} \quad v_2 = \frac{2}{2-k}v_1 > u > 0.$$

První kulička se tedy pohybuje stejným směrem jako druhá kulička, ale menší rychlostí, takže se s ní už nesrazí.

Rychlost třetí kuličky po srážce s druhou kuličkou pak bude $v_3 = \frac{2}{2-k}v_2 = \left(\frac{2}{2-k}\right)^2 v_1$, rychlost čtvrté kuličky bude $v_4 = \left(\frac{2}{2-k}\right)^3 \cdot v_1$ a tak dále.

Rychlost n-té kuličky pak bude $v_n = \left(\frac{2}{2-k}\right)^{n-1} v_1$. (1)

Pro n=10 je $v_{10} = 0{,}11\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **4 body**

b) Do vztahu (1) dosadíme $v_n = 2v_1$, upravíme a vyřešíme exponenciální rovnici

$$2v_1 = \left(\frac{2}{2-k}\right)^{n-1} v_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{2}{2-k}\right)} + 1 \doteq 70.$$

2 body

c) Pro n kuliček nastane $(n-1)$ srážek, hledaná doba t je součtem $(n-1)$ dob. Označme $t_1 = \frac{l}{v_1}$ dobu pohybu první kuličky do prvního nárazu. Obecně i-tá kulička se pohybuje do i-tého nárazu po dobu

$$t_i = \frac{l}{v_i} = \frac{l}{v_1}\left(\frac{2-k}{2}\right)^{i-1},$$

kde $i = 2, ..., n-1$. Pak

$$t = \sum_{i=2}^{n-1} t_i = \frac{l}{v_1}\sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{2-k}{2}\right)^{i-1}.$$

Jde tedy o geometrickou posloupnost s $(n-2)$ členy, jejíž první člen je $a_1 = \dfrac{l}{v_1}$ a kvocient $q = \dfrac{2-k}{2} < 1$. Součet této řady pak je

$$t = a_1 \frac{1-q^{n-2}}{1-q} = \frac{l}{v_1} \cdot \frac{1-\left(\frac{2-k}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{2-k}{2}} = \frac{2l}{kv_1}\left[1-\left(\frac{2-k}{2}\right)^{n-2}\right].$$

Pro $n = 10$ je $t = 7{,}6$ s, pro $n = 70$ je $t = 49$ s.

4 body

2. Aby se paprsky vrátily zpět ke zdroji, musí po průchodu čočkou dopadnout buď do vrcholu zrcadla, nebo musí dopadnout na zrcadlovou plochu kolmo. Úloha má tedy dvě řešení.

2 body

1) Obraz zdroje po zobrazení čočkou leží ve vrcholu zrcadla.

a) Pak podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d-v} = \frac{1}{f} \quad \text{plyne} \quad a = \frac{f(d-v)}{d-v-f} = 70 \text{ cm}.$$

b) Po obrácení zrcadla leží skutečný obraz zdroje vytvořený čočkou ve vzdálenosti $a_1 = 2v$ před vrcholem zrcadla. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a_1'} + \frac{1}{2v} = \frac{2}{R} \quad \text{určíme polohu jeho obrazu:} \quad a_1' = \frac{2vR}{4v-R} = 12 \text{ cm}.$$

Obraz vytvořený zrcadlem bude ve vzdálenosti 12 cm před vrcholem zrcadla a ve vzdálenosti $d+v-a_1' = 20$ cm za čočkou, tedy v jejím ohnisku. Proto obraz vytvořený čočkou bude v nekonečnu.

4 body

2. Obraz zdroje po zobrazení čočkou leží ve středu křivosti zrcadla.

a) Pak z $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{d+R-v} = \dfrac{1}{f}$ plyne $a = \dfrac{f(d+R-v)}{d+R-v-f} = 49$ cm.

b) Po obrácení zrcadla leží skutečný obraz vytvořený čočkou ve vzdálenosti $a_1 = R - 2v$ za vrcholem zrcadla. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a_1'} - \frac{1}{R-2v} = \frac{2}{R} \quad \text{určíme polohu jeho obrazu:} \quad a_1' = \frac{(R-2v)R}{3R-4v} = 1{,}2 \text{ cm}.$$

Obraz vytvořený zrcadlem bude ve vzdálenosti 1,2 cm před vrcholem zrcadla a ve vzdálenosti $d+v-a_1' = 30{,}8$ cm za čočkou. Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d+v-a_1'} = \frac{1}{f} \quad \text{dostaneme} \quad b = \frac{f(d+v-a_1')}{d+v-a_1'-f} = 57 \text{ cm}.$$

Obraz vytvořený čočkou při druhém průchodu paprsků bude ve vzdálenosti 57 cm před čočkou.

4 body

3. a) Při rozepnutém spínači S2 mají topná tělesa elektrické příkony

$$P_1 = R_1\left(\frac{U}{R_1+R_2}\right)^2 = 9\ \mathrm{W},$$

$$P_2 = R_2\left(\frac{U}{R_1+R_2}\right)^2 = 13{,}5\ \mathrm{W}.$$

Při sepnutém spínači S2 je odpor paralelně spojených rezistorů

$$R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = 2\ \Omega$$

a topná tělesa mají elektrické příkony

$$P_1' = R_1\left(\frac{U}{R_1+R_{23}}\right)^2 = 25\ \mathrm{W},$$

$$P_2' = R_2\left(\frac{R_3}{R_2+R_3}\frac{U}{R_1+R_{23}}\right)^2 = \frac{25}{6}\mathrm{W} = 4{,}17\ \mathrm{W}.$$ **4 body**

Teplo přijaté vodou v každém kalorimetru v okamžiku vyrovnání teplot je

$$Q_1 = m_1c\Delta t = P_1\tau_0 + P_1'\tau, \tag{1}$$

$$Q_2 = m_2c\Delta t = P_2\tau_0 + P_2'\tau. \tag{2}$$

Ze vztahů plyne

$$\tau = \frac{m_1P_2 - m_2P_1}{m_2P_1' - m_1P_2'}\cdot\tau_0 = 44\ \mathrm{s}.$$ **4 body**

b) Přírůstek teploty získáme z rovnice (1) nebo z rovnice (2):

$$\Delta t = \frac{P_1\tau_0 + P_1'\tau}{m_1c} = \frac{P_2\tau_0 + P_2'\tau}{m_2c} = 3{,}0\,^\circ\mathrm{C}.$$ **2 body**

4. a) Využitím ZZE: $\dfrac{mv_0^2}{2} = fmgs \quad\Rightarrow\quad s = \dfrac{v_0^2}{2fg}.$ **1 bod**

Využitím 2. pohybového zákona:

$$F = ma = fmg \quad\Rightarrow\quad a = fg;\ s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

b) Označme v souřadnici okamžité rychlosti kotouče vzhledem k desce, x souřadnici polohy kotouče měřenou ve směru rychlosti $\boldsymbol{v}_0$. Využitím 2. pohybového zákona: $ma = -bv$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -bv \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = -m\frac{\mathrm{d}v}{b} \quad\Rightarrow\quad -m\int_{v_0}^{0}\frac{\mathrm{d}v}{b} = \int_0^{s_1}\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad s_1 = \frac{mv_0}{b}.$$

3 body

c) Protože hmotnosti kotoučů jsou v porovnání s hmotností desky zanedbatelné, můžeme pohyb desky zkoumat samostatně a sílu tření, kterou kotouče působí na desku, můžeme zanedbat. Na desku působí ze strany stolu síla tření o velikosti $F_t = 2fMg$. Využitím ZZE:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = 2fMgs_d \quad \Rightarrow \quad s_d = \frac{v_0^2}{4fg}.$$

Kotouče na desce se vzhledem k podlaze rovněž zpomalují a každý z nich urazí dráhu $s = \frac{v_0^2}{2fg}$, pokud z desky nesklouznou. Z desky sklouznou všechny kotouče, které se nacházely ve vzdálenostech menších než $s - s_d = \frac{v_0^2}{4fg}$ od předního okraje desky. Počet těchto kotoučů pak bude $n = \left\lfloor \frac{v_0^2}{4fgl} \right\rfloor + 1$.

(Hranatá závorka znamená celou část čísla v závorce). **3 body**

d) V soustavě spojené s podlahou z 2. pohybového zákona

$$ma = -b\left(v - v_0\right) \quad \Rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -b\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\right),$$

kde x, x_0 jsou souřadnice kotouče a desky a v je souřadnice okamžité rychlosti kotouče. Pak

$$m\mathrm{d}v = -b\left(\mathrm{d}x - \mathrm{d}x_0\right),$$

$$m\int_{v_0}^{0} \frac{\mathrm{d}v}{b} = x_0 - x \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \frac{mv_0}{b}.$$

Vzhledem k desce urazí každý kotouč dráhu $s_1 = x - x_0 = \frac{mv_0}{b}$, pokud z desky nesklouzne. Počet kotoučů, které z desky sklouznou, tedy bude $n_1 = \left\lfloor \frac{mv_0}{bl} \right\rfloor + 1$. (Hranatá závorka znamená celou část čísla v závorce). Tento počet nezávisí na velikosti tření mezi deskou a podlahou.

3 body