Řešení úloh celostátního kola 58. ročníku fyzikální olympiády

Autor úloh: J. Thomas

1. a) Při α-rozpadu se nukleonové číslo zmenší o 4, při β-rozpadu se nukleonové číslo nezmění, proto nastaly 4 přeměny alfa. Tím se protonové číslo zmenšilo o osm, tedy úbytek 8 protonů musí být kompenzován dvěma přeměnami beta. Proto platí ${}^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{4\alpha + 2\beta} {}^{222}_{86}\mathrm{Rn}$.
Rovnice rozpadu jsou: ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$, ${}^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$. **2 body**

b) $E_r = \left[m\left({}^{222}_{86}\mathrm{Rn}\right) - m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right) - m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)\right] c^2 = 8{,}950\,5 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 5{,}59\ \mathrm{MeV}.$
2 body

c) Můžeme předpokládat, že energie reakce je rovna kinetické energii vzniklých částic:

$$E_r = \frac{1}{2} m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right) v_{\mathrm{Po}}^2. \tag{1}$$

Podle zákona zachování hybnosti musí platit

$$m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) v_\alpha = m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right) v_{\mathrm{Po}}. \tag{2}$$

Dosazením za v_{Po} z rovnice (2) do rovnice (1)

$$E_r = \frac{1}{2} v_\alpha^2 \left\{ m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) + \frac{\left[m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)\right]^2}{m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)} \right\} = \frac{1}{2} m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) v_\alpha^2 \left[1 + \frac{m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)}{m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)} \right] \quad \Rightarrow$$

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_r}{m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)\left[1 + \frac{m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)}{m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)}\right]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2E_r m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)}{m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)\left[m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) + m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)\right]}} = 1{,}6 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Dosazením do rovnice (2)

$$v_{\mathrm{Po}} = \frac{m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)}{m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)} v_\alpha = \frac{m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)}{m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)} \sqrt{\frac{2E_r m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)}{m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)\left[m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) + m\left({}^{218}_{84}\mathrm{Po}\right)\right]}} = 3{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

4 body

d) V krychlovém metru vzduchu je $N_1 = \dfrac{A}{\lambda} = \dfrac{A \cdot T}{\ln 2}$ atomů radonu, v celém objemu sklepa pak

$$N = \frac{A}{\lambda} \cdot V = \frac{AT}{\ln 2} abc = 4{,}5 \cdot 10^9 \text{ atomů } {}^{222}_{86}\mathrm{Rn}.$$

2 body

2. a) Pro dráhu mezi optickými závorami platí: $s = v_0 t + \dfrac{1}{2} g t^2 = t\sqrt{2hg} + \dfrac{1}{2} g t^2$.

Užitím substituce $y = \sqrt{g}$ dostáváme kvadratickou rovnici $\dfrac{t^2}{2} y^2 + t\sqrt{2h} y - s = 0$.

Fyzikální smysl má kladný kořen:

$$y=\frac{-t\sqrt{2h}+t\sqrt{2h+2s}}{t^2}=\frac{-\sqrt{2h}+\sqrt{2h+2s}}{t}=3{,}13.$$

Pak $g=y^2=9{,}79\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. **3 body**

b) Velikosti tíhové a odporové síly se v krátké době vyrovnají. Pak bude kulička padat maximální rychlostí a bude platit

$$mg=\frac{1}{2}C\rho_{vz}\pi r^2 v_{\max}^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{3}\pi r^3\rho g=\frac{1}{2}C\rho_{vz}\pi r^2 v_{\max}^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad v_{\max}=\sqrt{\frac{8r\rho g}{3C\rho_{vz}}}=41\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2 body

c) Na padající kuličku působí síla, jejíž velikost závisí na rychlosti

$$F=mg-\frac{1}{2}C\rho_{vz}\pi r^2v^2=\left(1-Kv^2\right)mg,$$

kde $K=\dfrac{C\rho_{vz}\pi r^2}{2mg}=\dfrac{3C\rho_{vz}}{8r\rho g}=\dfrac{1}{v_{\max}^2}$.

Podle druhého pohybového zákona $F(v)=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Provedeme separaci proměnných a integrujeme

$$\int\limits_0^{v_1}\frac{m\mathrm{d}v}{F(v)}=\int\limits_0^{t_1}\mathrm{d}t.$$

Pro dobu pádu kuličky dostaneme (s použitím pomůcky ze zadání pro integraci)

$$t_1=m\int\limits_0^{v_1}\frac{\mathrm{d}v}{F(v)}=\int\limits_0^{v_1}\frac{\mathrm{d}v}{\left(1-Kv^2\right)g}=\frac{1}{g}\int\limits_0^{v_1}\frac{\mathrm{d}v}{\left(1-Kv^2\right)}=\frac{1}{g}\int\limits_0^{v_1}\frac{\mathrm{d}v}{K\left(\frac{1}{K}-v^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{Kg}\int\limits_0^{v_1}\frac{\mathrm{d}v}{\left(\frac{1}{K}-v^2\right)}=\frac{1}{Kg}\int\limits_0^{v_1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{K}}{\frac{1}{\sqrt{K}}+v}+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{K}}{\frac{1}{\sqrt{K}}-v}\right)\mathrm{d}v=$$

$$=\frac{1}{2g\sqrt{K}}\int\limits_0^{v_1}\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{K}}+v}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{K}}-v}\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{2g\sqrt{K}}\left[\ln\frac{\frac{1}{\sqrt{K}}+v}{\frac{1}{\sqrt{K}}-v}\right]_0^{v_1}=$$

$$=\frac{v_{\max}}{2g}\ln\frac{v_{\max}+v_1}{v_{\max}-1}=3{,}9\ \mathrm{s}.$$

3 body

Použili jsme úpravu: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{K}-v^2}=\dfrac{A}{\sqrt{\dfrac{1}{K}}+v}+\dfrac{B}{\sqrt{\dfrac{1}{K}}-v}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{K}}\left(A+B\right)+\left(B-A\right)v}{\dfrac{1}{K}-v^2}$

$(B-A)=0$ a $\sqrt{\dfrac{1}{K}}\left(A+B\right)=1 \quad \Rightarrow \quad A=B=\dfrac{\sqrt{K}}{2} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\dfrac{1}{K}-v^2}=\frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{K}}{\dfrac{1}{\sqrt{K}}+v}+\frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{K}}{\dfrac{1}{\sqrt{K}}-v}.$$

Pro určení dráhy, kterou kulička za tuto dobu urazí, upravíme pohybový zákon: Za $\mathrm{d}t$ dosadíme výraz $\dfrac{m\mathrm{d}v}{F(v)}$. Úprava vede na tvar

$$F\left(v\right)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Po separaci proměnných můžeme integrovat

$$m\int_0^{v_1}\frac{v\mathrm{d}v}{F\left(v\right)}=\int_0^{v_1}\frac{v\mathrm{d}v}{\left(1-Kv^2\right)g}=\int_0^{s_1}\mathrm{d}x,$$

pak

$$s_1=\int_0^{v_1}\frac{v\mathrm{d}v}{\left(1-Kv^2\right)g}=\frac{1}{g}\int_0^{v_1}\frac{v\mathrm{d}v}{1-Kv^2}=\frac{1}{g}\int_1^{1-Kv_1^2}-\frac{1}{2K}\frac{\mathrm{d}z}{z}=$$

$$=-\frac{1}{2Kg}\int_1^{1-Kv_1^2}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{1}{2Kg}\left[\ln z\right]_1^{1-Kv_1^2}=-\frac{1}{2Kg}\left(\ln\left(1-Kv_1^2\right)-\ln 1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2Kg}\ln\left(1-Kv_1^2\right)=-\frac{v_{\mathrm{max}}^2}{2g}\ln\left(1-\frac{v_1^2}{v_{\mathrm{max}}^2}\right)=66\ \mathrm{m}.$$

2 body

Použili jsme substituci $z=1-Kv^2,\ \mathrm{d}z=-2Kv\mathrm{d}v \quad \Rightarrow \quad v\mathrm{d}v=-\dfrac{1}{2K}\mathrm{d}z.$

3. a) V neinerciální vztažné soustavě spojené s částicí na částici působí setrvačná odstředivá síla a proti ní jednak síla odporová, jednak síla vztlaková

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho\omega^2 r=6\pi\eta R v+\frac{4}{3}\pi R^3\rho_v\omega^2 r.$$

Odtud $v=\dfrac{2R^2\left(\rho-\rho_v\right)\omega^2 r}{9\eta}=\dfrac{2R^2\left(\rho-\rho_v\right)\left(2\pi f\right)^2 r}{9\eta}=0{,}020\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$ **2 body**

b) Rychlost částice je přímo úměrná vzdálenosti od osy otáčení. Její průměrná rychlost bude

$$\bar{v} = \frac{2R^2(\rho - \rho_v)\omega^2}{18\eta}(2r + l)$$

a hledaná doba $\tau = \frac{l}{\bar{v}} = \frac{18\eta l}{2R^2(\rho - \rho_v)(2\pi f)^2(2r + l)} = 2{,}1$ s. **2 body**

c) Postup je stejný jako v částech a) a b), jen odstředivé zrychlení nahradíme tíhovým. Rychlost pak bude

$$v_1 = \frac{2R^2(\rho - \rho_v)g}{9\eta} = 1{,}91 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

a doba $\tau_1 = \frac{l}{v_1} = \frac{9\eta l}{2R^2(\rho - \rho_v)g} = 2{,}6 \cdot 10^3$ s. **2 body**

d) Ze stavové rovnice $p = \frac{\rho R_m T}{M_m}$ vidíme, že podíl $\frac{\rho}{p} = \frac{M_m}{R_m T}$ je při stálé teplotě stálý. Dosazením do barometrické rovnice dostaneme

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_m g}{R_m T}\Delta h.} \tag{1}$$

Protože tlak je za stálé teploty přímo úměrný hustotě molekul $p = N_V kT$, můžeme napsat

$$N_{V1} = N_{V0}\mathrm{e}^{-\frac{M_m g}{R_m T}\Delta h} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = -\frac{R_m T}{M_m g}\ln\frac{N_{V1}}{N_{V0}} = -\frac{R_m T}{M_m g}\ln 0{,}99 = 80\ \mathrm{m}.$$

2 body

e) Při stálé teplotě je hustota molekul přímo úměrná tlaku. Z naměřených hodnot je vidět, že hustota molekul klesne každých 30 μm na polovinu. Hledáme tedy, v jaké výšce $h_{1/2}$ nad základnou má tlak poloviční velikost. Z barometrické rovnice (1) plyne

$$h_{1/2} = \frac{R_m T}{M_m g}\ln 2.$$

V této rovnici nahradíme molární hmotnost molekuly „molární hmotností částice“ $M_m = mN_A$, kde m je hmotnost jedné částice. Na částice emulze působí ale také vztlaková síla, proto je zrychlení g^* v našem případě menší než tíhové zrychlení. Po dosazení

$$h_{1/2} = \frac{R_m T}{N_A m g^*}\ln 2 = \frac{R_m T}{N_A \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_v)g}\ln 2,$$

$$N_A = \frac{R_m T}{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_v)g h_{1/2}}\ln 2 = 7 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}.$$

2 body

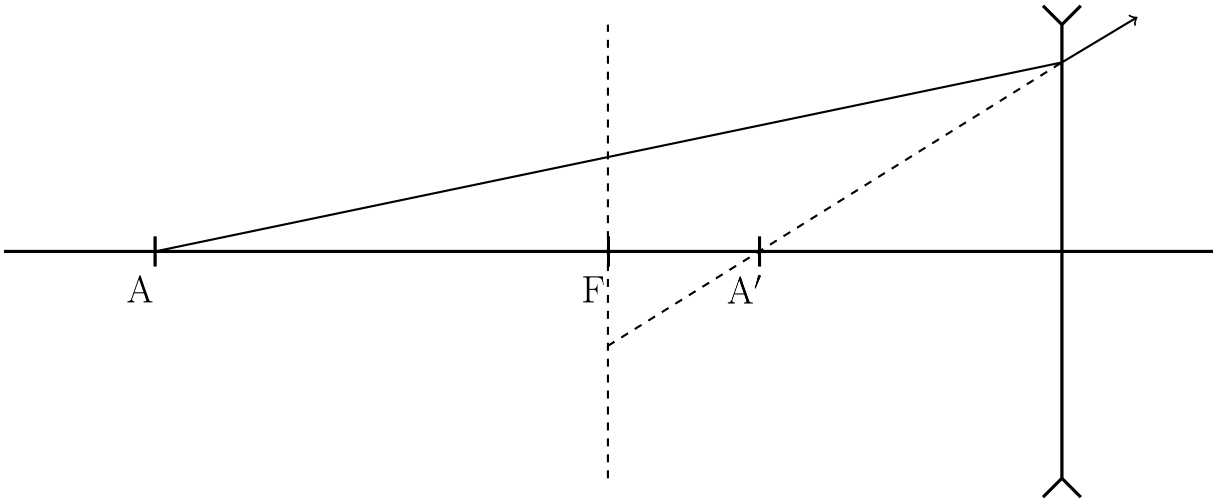
4. Jsou celkem 4 možnosti:

1. Čočka je rozptylka. V takovém případě leží čočka za bodem A’ a dává neskutečný obraz.

Vzdálenost zdroje od čočky označme x. Podle zobrazovací rovnice $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-l} = -\dfrac{1}{x-d}$. Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 2lx + ld = 0$. Čočka se nachází ve vzdálenosti $x = l + \sqrt{l\,(l-d)} = 12$ cm od zdroje.

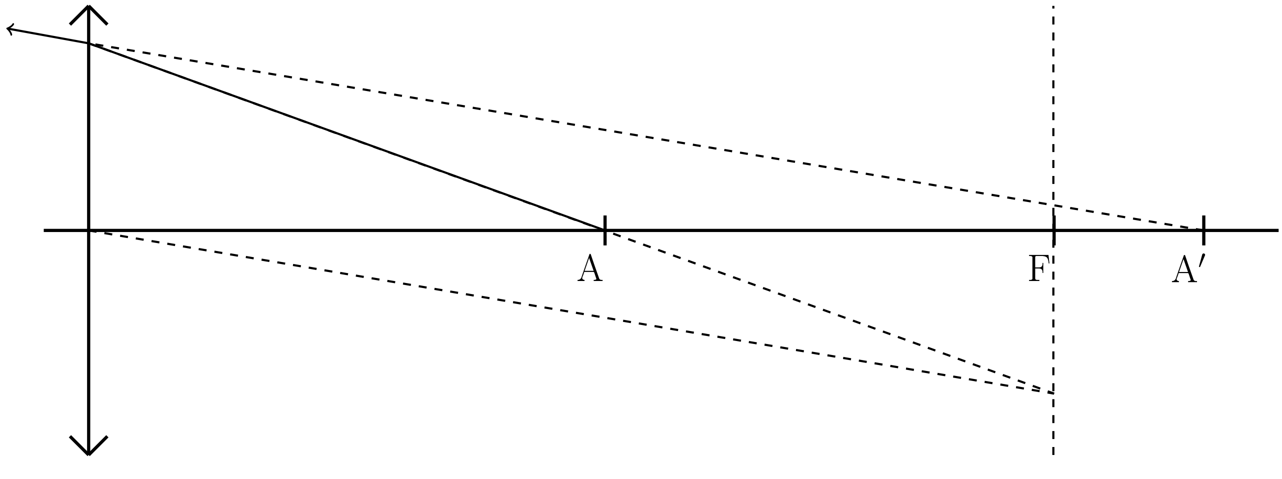
2,5 bodu

Úlohu lze řešit rovněž geometrickou konstrukcí:



2. Čočka je spojka, která leží před bodem A. Pak čočka dává neskutečný obraz.

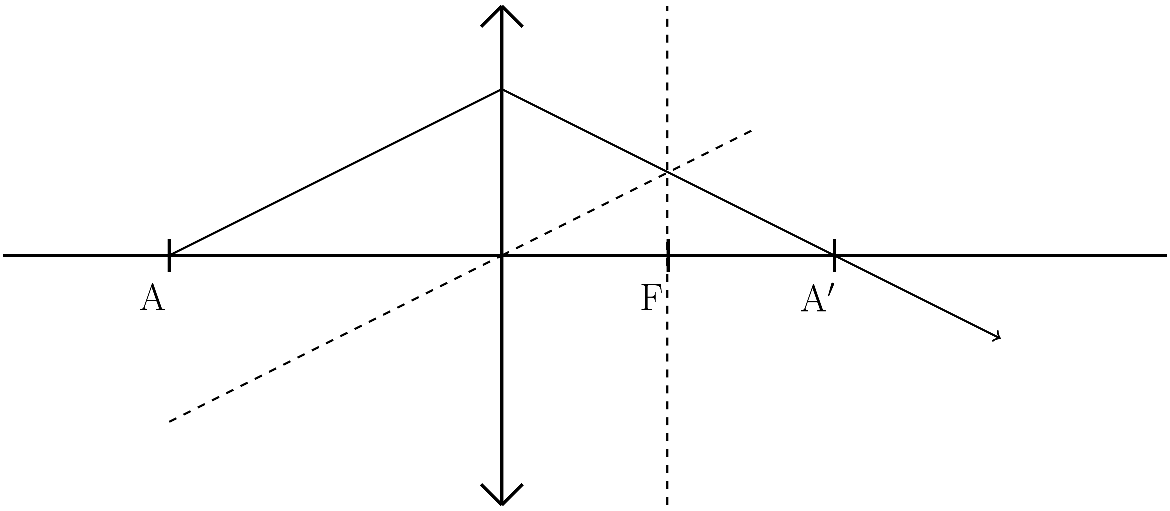
Podle zobrazovací rovnice $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+l} = \dfrac{1}{x+d}$. Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 = ld$. Čočka se nachází ve vzdálenosti $x = \sqrt{ld} = 6{,}9$ cm před zdrojem.



2,5 bodu

3. Čočka je spojka, F je obrazové ohnisko. Obraz vytvořený čočkou je skutečný.

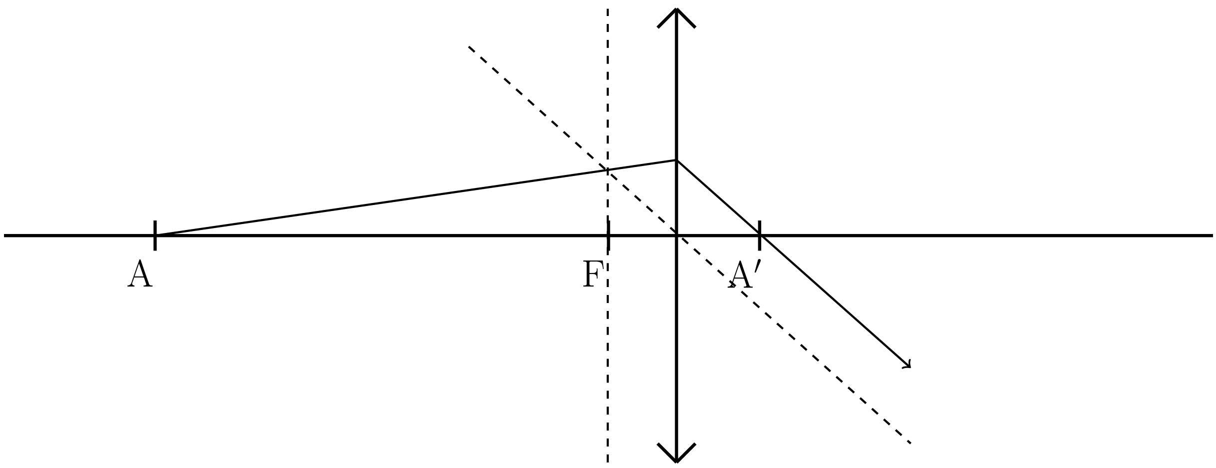
Podle zobrazovací rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{d-x}$. Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 2lx + ld = 0$. Čočka se nachází ve vzdálenosti $x = l - \sqrt{l\,(l-d)} = 4$ cm od zdroje.



2,5 bodu

4. Čočka je spojka, F je předmětové ohnisko. Obraz vytvořený spojkou je skutečný.

Podle zobrazovací rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} = \frac{1}{x-d}$. Odtud po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 = ld$. Čočka se nachází ve vzdálenosti $x = \sqrt{ld} = 6{,}9$ cm od zdroje.



2,5 bodu