Řešení úloh 1. kola 58. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 4, 5, 7), I. Čáp (6)

1.a) Předpokládáme-li impuls třecích sil puků o led vzhledem k velmi krátké době srážky za zanedbatelný, lze použít zákon zachování hybnosti, podle kterého

$$v\sin\alpha - u\sin\beta = 0 \tag{1}$$

$$v\cos\alpha + u\cos\beta = v_0 \tag{2}$$

Z rovnice (1) $u = v\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{v}{u} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5{,}4.$

2 body

b) Dráha puku do zastavení $s = \dfrac{v^2}{2a} = \dfrac{v^2}{2fg}$, poměr drah

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\dfrac{v^2}{2fg}}{\dfrac{u^2}{2fg}} = \frac{v^2}{u^2} = \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 = 29{,}3.$$

3 body

c) Dosazením z rovnice (1) do rovnice (2)

$$v\cos\alpha + v\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta = v_0 \quad \Rightarrow \quad v\sin(\alpha+\beta) = v_0\sin\beta \quad \Rightarrow$$

$$v = v_0\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{a} \quad u = v_0\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Umocněním rovnic (1) a (2)

$$v^2\sin^2\alpha - 2vu\sin\alpha\sin\beta + u^2\sin^2\beta = 0,$$
$$v^2\cos^2\alpha + 2vu\cos\alpha\cos\beta + u^2\cos^2\beta = v_0^2,$$

a jejich sečtením

$$v^2 + u^2 + 2uv(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = v_0^2.$$

Úbytek kinetické energie bude $\Delta E_\mathrm{k} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{m\left(u^2+v^2\right)}{2} = mvu\cos(\alpha+\beta)\,.$

Na teplo se tedy přeměnilo

$$\frac{\Delta E_\mathrm{k}}{E_\mathrm{k}} = \frac{mvu\cos(\alpha+\beta)}{\dfrac{mv_0^2}{2}} = 2\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = 0{,}058\ 5 = 5{,}85\ \%$$

5 bodů

2.a) V rovnováze je součet všech sil, které na soustavu působí roven nule. Označíme-li tíhové síly válečků F_{G1} a F_{G2} a vztlakové síly F_{vz1} a F_{vz2}, platí

$$F_{G2} + F_{vz1} = F_{G1} + F_{vz2},$$

$$\rho_2\pi\frac{d^2}{4}h_0 g + \rho_v\pi\frac{d^2}{4}(h_0 - a_1)\,g = \rho_1\pi\frac{d^2}{4}h_0 g + \rho_v\pi\frac{d^2}{4}(h_0 - a_2)\,g,$$

$$h_0\rho_2 + a_2\rho_v = h_0\rho_1 + a_1\rho_v,$$

$$a_2 = h_0\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_v} + a_1 = 7{,}0 \text{ cm}.$$

2 body

b) Pro $x \in \langle -10 \ \text{cm}; -3 \ \text{cm}\rangle$ se bude horní podstava levého válečku nacházet pod hladinou vody a spodní podstava pravého válečku nad hladinou vody. Pro složku F_x platí

$$F_x = F_{G2} + F_{vz1} - F_{G1} = \rho_2\pi\frac{d^2}{4}h_0g + \rho_v\pi\frac{d^2}{4}h_0g - \rho_1\pi\frac{d^2}{4}h_0g = \\ = \pi\frac{d^2}{4}h_0g\left(\rho_2 + \rho_v - \rho_1\right) = 0{,}185 \text{ N}.$$

Pro $x \in (-3 \ \text{cm}; 7 \ \text{cm})$ se síla působící na soustavu mění:

$$F_x = \pi\frac{d^2}{4}h_0\left(\rho_2 - \rho_1\right)g + \pi\frac{d^2}{4}\rho_v g\left(h_1 - h_2\right) = \\ = \pi\frac{d^2}{4}h_0\left(\rho_2 - \rho_1\right)g + \pi\frac{d^2}{4}\rho_v g\left(h_0 - a_1 - x \ - h_0 + a_2 - x\right) = \\ = \pi\frac{d^2}{4}h_0\left(\rho_2 - \rho_1\right)g + \pi\frac{d^2}{4}\rho_v g\left(a_2 - a_1 - 2x\right) = \\ = -\pi\frac{d^2}{4}h_0 0,4\rho_v g + \pi\frac{d^2}{4}\rho_v g\left(a_2 - a_1 - 2x\right) = \\ = -\pi\frac{d^2}{4}h_0 0,4\rho_v g + \pi\frac{d^2}{4}\rho_v g\left(0,4h_0 - 2x\right) = -2\pi\frac{d^2}{4}\rho_v g x. \quad (1)$$

kde $h_1 = h_0 - a_1 - x$ je výška ponořené části levého válečku a $h_2 = h_0 - a_2 + x$ výška ponořené části pravého válečku.

Když horní podstava levého válečku dosáhne hladiny, začne se velikost vztlakové síly na levý váleček zmenšovat a poroste velikost vztlakové síly na pravý váleček. Velikost síly otáčející soustavou se bude zmenšovat a v okamžiku, kdy se horní podstava levého válečku nachází ve výšce a_1 ($x = 0$ cm) nad hladinou, bude tato síla rovna nule. Protože se velikost vztlakové síly na levý váleček bude zmenšovat a naopak velikost vztlakové síly na druhý váleček zvětšovat, bude výsledná síla pohyb soustavy brzdit a její absolutní hodnota se bude zvětšovat, dokud se levý váleček úplně nevynoří a pravý váleček úplně neponoří ($x = 7$ cm).

Pro $x \in \langle 7 \ \text{cm}; 10 \ \text{cm}\rangle$ pak bude pro výslednou sílu platit:

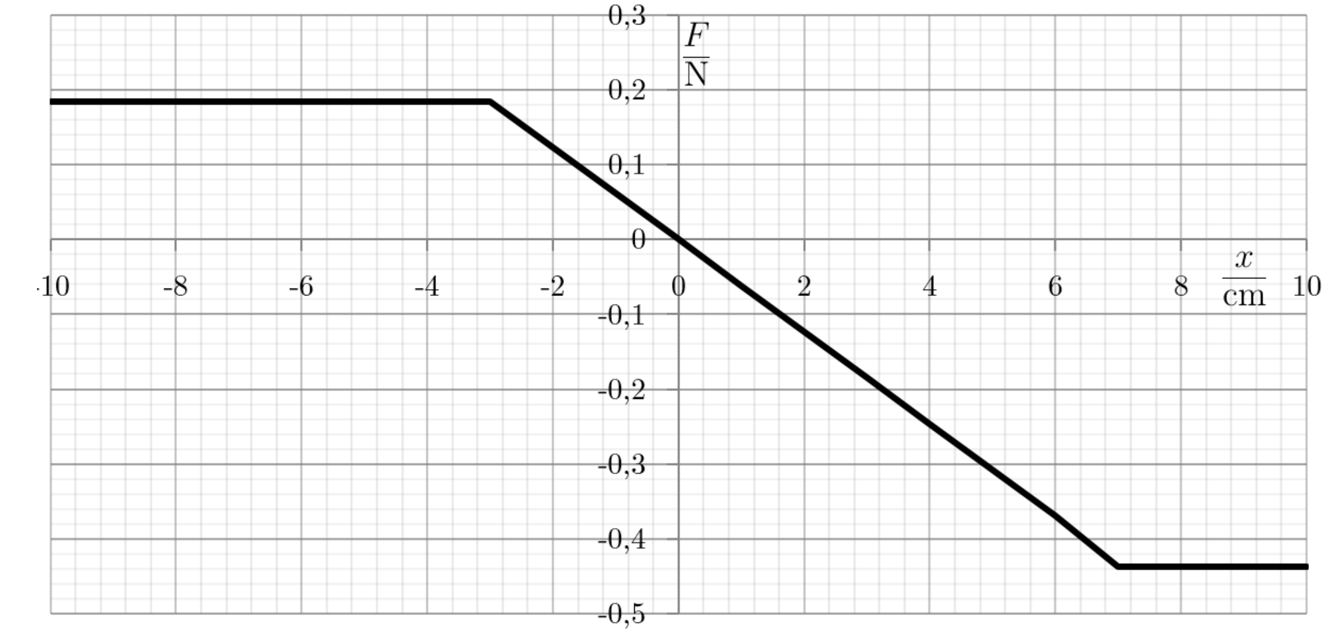
$$F_x = F_{G2} - F_{vz2} - F_{G1} = \rho_2\pi\frac{d^2}{4}h_0g - \rho_v\pi\frac{d^2}{4}h_0g - \rho_1\pi\frac{d^2}{4}h_0g = \\ = \pi\frac{d^2}{4}h_0g\left(\rho_2 - \rho_v - \rho_1\right) = -0{,}437 \text{ N}$$

a při dalším pohybu už se její velikost měnit nebude.

4 body

Závislost velikosti síly otáčející soustavou ve směru hodinových ručiček zapíšeme do tabulky a sestrojíme graf (viz obr. R1).

$\frac{x}{\text{cm}}$	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$\frac{h_1}{\text{cm}}$	10	10	10	10	10	10	10	10	9	8	7
$\frac{h_2}{\text{cm}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
$\frac{F}{\text{N}}$	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185	0,123	0,062	0
$\frac{x}{\text{cm}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{h_1}{\text{cm}}$	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0
$\frac{h_2}{\text{cm}}$	3	4	5	6	7	8	9	10	10	10	10
$\frac{F}{\text{N}}$	0	-0,062	-0,123	-0,185	-0,246	-0,303	-0,369	-0,437	-0,437	-0,437	-0,437



Obr. R1

Alternativní výpočet v části b): Pro $x = 0$, tj. v rovnovážné poloze soustavy, je $F_x = 0$. Otáčíme-li z této polohy doprava, pak pro $x \in \langle 0 \text{ cm}; 10 \text{ cm}\rangle$ se vztlaková síla na levý váleček, který je vytahován z vody, zmenší o $\pi\frac{d^2}{4}\rho_v g x$ a o tutéž hodnotu se naopak zvětší vztlaková síla na pravý váleček, který je ponořován hlouběji. Složka F_x výsledné síly působící na levý váleček se tedy změní z nulové hodnoty na hodnotu $F_x = -2\pi\frac{d^2}{4}\rho_v x$. Výsledná síla působící na levý váleček bude směřovat svisle dolů a bude mít snahu vrátit váleček do rovnovážné polohy. Snadno nahlédneme, že týž výsledek pro F_x dostaneme i v případě, že soustavou otáčíme z rovnovážné polohy doleva v rozmezí $x \in \langle -3 \text{ cm}; 0 \text{ cm}\rangle$. V tomto intervalu $F_x > 0$, tedy se výsledná síla opět snaží vrátit soustavu do rovnovážné polohy. Zjistili jsme tak, že

$$F_x = -2\pi\frac{d^2}{4}\rho_v g x \quad \text{pro} \quad x \in \langle -3\ \text{cm}; 7\ \text{cm}\rangle\,.$$

Mez $x = -3$ cm odpovídá krajní poloze soustavy, kdy při otáčení doleva z rovnovážné polohy se právě levý váleček zcela ponoří a pravý zcela vynoří z vody. Pro $x \in \langle -10\ \text{cm}; -3\ \text{cm}\rangle$ se tak vztlakové síly na oba válečky již nemění a F_x nabývá konstantní hodnoty dané vztahem (1) pro $x = -a_1 = -3\ \text{cm}'$, tj.

$$F_x = 2\pi\frac{d^2}{4}\rho_v g a_1 = 0{,}185\ \text{N} \quad \text{pro} \quad x \in \langle -10\ \text{cm};\ -3\ \text{cm}\rangle\,.$$

Mez $x = 7$ cm přitom odpovídá druhému krajnímu stavu, kdy při otáčení soustavy z rovnovážné polohy doprava se právě pravý váleček zcela ponoří a levý zcela vytáhne z vody. Při dalším zvětšování x se tedy vztlakové síly působící na válečky již nebudou měnit a F_x bude rovno hodnotě dané vztahem (1) pro $x = a_2 = 7$ cm. Platí tedy

$$F_x = -2\pi\frac{d^2}{4}\rho_v g a_2 = -0437\ \text{N} \quad \text{pro} \quad x \in \langle 7\ \text{cm};\ 10\ \text{cm}\rangle\,.$$

c) Z grafu i vztahu (1) je zřejmé, že v rozmezí $x \in \langle -3\ \text{cm}; 3\ \text{cm}\rangle$ je síla přímo úměrná výchylce, ale má opačný směr; pohyb soustavy je tedy harmonický.

Periodu harmonického oscilátoru určíme ze vztahu $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Protože složka síly, která vrací soustavu do rovnovážné polohy, závisí na vzdálenosti x podle vztahu (1), můžeme napsat

$$F_x = -2\pi\frac{d^2}{4}\rho_v g x = -kx,\ \text{pak}\ k = 2\pi\frac{d^2}{4}\rho_v g,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\frac{d^2}{4}h_0\left(\rho_2+\rho_1\right)}{2\pi\frac{d^2}{4}\rho_v g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h_0\left(\rho_2+\rho_1\right)}{2\rho_v g}} = 1{,}0\ \text{s}.$$

2 body

3.a) Drátek se ohřívá Jouleovým teplem:

$$mc_c u\Delta T = RI^2 t, \tag{1}$$

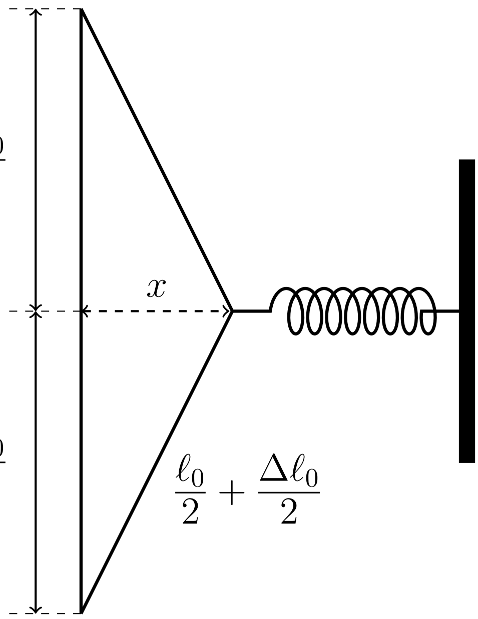
hmotnost drátku je

$$m = \rho_m V = \rho_m l_0 S, \tag{2}$$

odpor drátku

$$R = \rho_e\frac{\ell_0}{S}. \tag{3}$$

Z rovnice (1) vyjádříme změnu teploty a po dosazení za m z rovnice (2) a za S z rovnice (3) dostaneme



Obr. R2

$$\Delta T = \frac{RI^2t}{mc_{cu}} = \frac{RI^2t}{\rho_m \ell_0 S c_{cu}} = \frac{R^2I^2t}{\rho_m \ell_0^2 \rho_e c_{cu}} = \frac{9 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}5}{8\,900 \cdot 0{,}09 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 390}\,\mathrm{K} = 76{,}26\ \mathrm{K}$$

4 body

b) Drátek se zahřátím prodlouží o $\Delta\ell = \ell_0 \alpha \Delta T = \alpha \dfrac{R^2I^2t}{\rho_m \ell_0 \rho_e c_{cu}} = 3{,}661 \cdot 10^{-4}$ m.
pro vzdálenost x pak platí (viz obr. R2)

$$x = \sqrt{\left(\frac{\ell_0}{2} + \frac{\Delta\ell}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell_0}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\ell_0 + \Delta\ell)^2 - \ell_0^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\ell_0 + \alpha \frac{R^2I^2t}{\rho_m \ell_0 \rho_e c_{cu}}\right)^2 - l_0^2} = 7{,}41230\ \mathrm{mm}$$

4 body

c) Protože $\Delta l \ll l_0$, můžeme napsat

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(\ell_0 + \Delta\ell)^2 - \ell_0^2} \approx \frac{1}{2}\sqrt{2\ell_0\Delta\ell} = \frac{1}{2}\sqrt{2\alpha \frac{R^2I^2t}{\rho_m \rho_e c_{cu}}} =$$

$$= RI\sqrt{t}\sqrt{\frac{\alpha}{2\rho_m \rho_e c_{cu}}} = 7{,}41004\ \mathrm{mm}.$$

Odchylka $\Delta x = 0{,}00226$ mm, relativní odchylka $\delta x = 0{,}030$ %.

2 body

4.a) Nejprve odvodíme rychlost, jakou obíhá kulička kuželového kyvadla po kružnici. Pro poměr velikostí setrvačné odstředivé síly a síly tíhové platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gl\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{lg\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}.$$

Pro dobu oběhu kuželového kyvadla platí:

$$T_K = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi l \sin\alpha}{\sqrt{lg \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}.$$

Z poměru period

$$51 T_K = 50 T_M$$

$$51\sqrt{\cos\alpha} = 50\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

s použitím přibližných vzorců $51\left(\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{2}}\right) = 51\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right) = 50\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)$,

odtud pak $$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\frac{50}{16}+\frac{51}{4}}} = 0{,}25\ \text{rad} = 14°.$$ **6 bodů**

b) Velikost síly napínající nit u kuželového kyvadla je

$$F_K = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{l\sin\alpha}\right)^2 + (mg)^2} = \sqrt{(mg\operatorname{tg}\alpha)^2 + (mg)^2} = mg\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1},$$

velikost síly napínající nit v rovnovážné poloze matematického kyvadla je

$$F_M = mg + \frac{mv^2}{l} = mg + 2mg\,(1-\cos\alpha) = mg\,(3 - 2\cos\alpha)\,.$$

Poměr velikostí těchto sil:

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{3-2\cos\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}} = \cos\alpha\,(3-2\cos\alpha) = 1{,}03.$$ **4 body**

5.a) Urychlením v elektrickém poli získá elektron rychlost $v_x = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}$.
V elektrickém poli kondenzátoru na elektron ještě působí síla

$$F_y = ma = eE = \frac{eU_2}{d}$$

a elektron tak ve směru osy y získá rychlost $v_y = at = \frac{F_y}{m}t$. Protože $t = \frac{l}{v_x} =$ $= l\sqrt{\frac{m}{2eU_1}}$, dostáváme po dosazení

$$v_y = \frac{leU_2}{dm}\sqrt{\frac{m}{2eU_1}} = \frac{lU_2}{d}\sqrt{\frac{e}{2mU_1}}. \tag{1}$$

Platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y}{s} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{v_y}{v_x}s = \frac{\frac{lU_2 s}{d}\sqrt{\frac{e}{2mU_1}}}{\sqrt{\frac{2eU_1}{m}}} = \frac{lU_2 s}{2dU_1} = 8{,}0\ \text{cm}.$$

Svítící bod na stínítku tedy bude mít souřadnice $y = 8{,}0$ cm, $z = 0$ cm.

5 bodů

b) Po zapnutí magnetického pole bude na elektron působit magnetická síla až po jeho vychýlení v elektrickém poli kondenzátoru. Její směr bude kolmý k oběma složkám rychlosti. Průmětem trajektorie pohybu elektronu do roviny y–z bude kružnice. Magnetická síla je silou dostředivou, proto platí:

$$\frac{mv_y^2}{r} = Bev_y \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv_y}{eB_1}. \tag{2}$$

Že se stopa elektronu objeví počátku souřadnic znamená, že v rovině y–z vykonal elektron právě jednu otáčku. Pak platí:

$$T = \frac{2\pi r}{v_y} = \frac{2\pi m}{eB_1} \quad \text{a také} \quad T = \frac{s}{v_x} = s\sqrt{\frac{m}{2eU_1}}.$$

Z rovnosti výrazů odvodíme

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U_1}{s^2 B_1^2} = 1,75 \cdot 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}. \tag{3}$$

3 body

c) Dosazením vztahu (1) a (3) do vztahu (2) dostaneme pro poloměr šroubovice:

$$r = \frac{mv_y}{eB_1} = \frac{B_1^2 s^2 v_y}{8\pi^2 U_1 B_1^2} = \frac{lU_2 s}{4\pi d U_1} = 1{,}30\ \text{cm}.$$

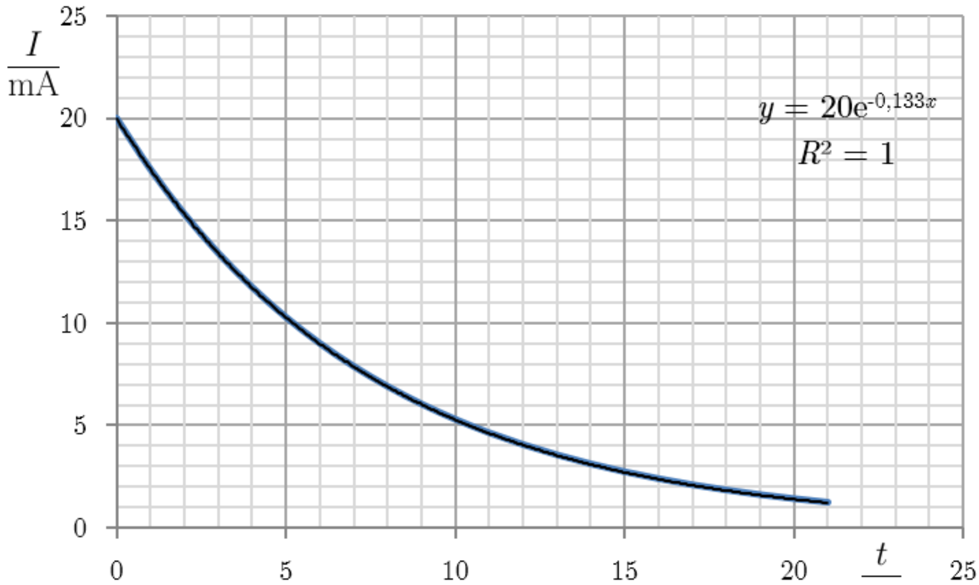
2 body

7.a) Graf je na obrázku R3. Z rovnice regrese vidíme, že platí

$$-\frac{1}{RC} = -0{,}133\ \ (\mathrm{ms})^{-1} = -0{,}133.10^3\ \mathrm{s}^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{0{,}133 \cdot 500} \cdot 10^{-3} F = 15{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}.$$

Kapacita kondenzátoru je tedy $C = 15{,}0\ \mu$F. **2 body**



Obr. R3

b) V sériovém obvodu RC platí:

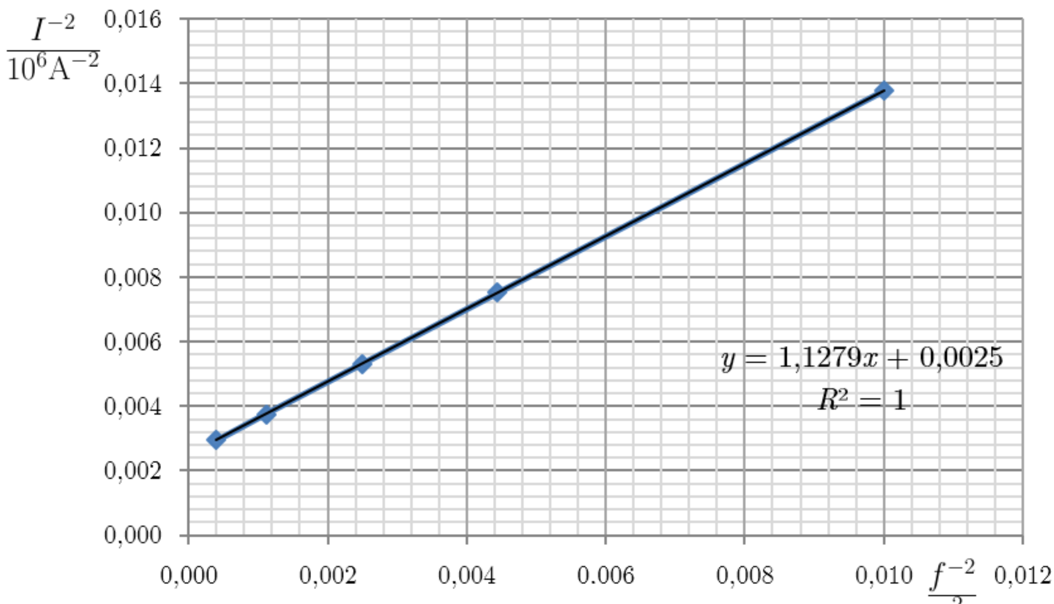
$$Z^2 = \frac{U^2}{I^2} = R^2 + X_C^2 = R^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C_1^2},$$

$$\frac{1}{I^2} = \frac{R^2}{U^2} + \frac{1}{4\pi^2 U^2 C_1^2} \cdot \frac{1}{f^2}.$$

Tabulku doplníme s využitím EXCELu o dva řádky:

$\frac{f}{\text{Hz}}$	10,0	15,0	20,0	30,0	50,0
$\frac{I}{\text{mA}}$	8,52	11,54	13,72	16,33	18,41
$\frac{f^{-2}}{\text{s}^2}$	0,01	0,004444	0,0025	0,001111	0,0004
$\frac{I^{-2}}{\text{mA}^{-2}}$	0,013776	0,007509	0,005312	0,00375	0,00295

Sestrojíme graf:



Obr. R4

Z rovnice regrese odečteme: $\frac{R^2}{U^2} = 0{,}002\,5 \cdot 10^6\ \text{A}^{-2}$,

$$\frac{1}{4\pi^2 U^2 C_1^2} = 1{,}127\,9 \cdot 10^6\ \text{V}^{-2}\text{F}^{-2}.$$

Odtud $C_1 = \frac{1}{2\pi 10\sqrt{1,127\,9 \cdot 10^6}}\ \text{F} = 15{,}0\ \mu\text{F}.$ **3 body**

c) Ze jmenovitých hodnot určíme efektivní hodnotu proudu, který by měl žárovkou procházet a odpor jejího vlákna: $I = \frac{P}{U} = 0,83$ A a $R_ž = \frac{U^2}{P} = 144\ \Omega$.

Při napětí U_1 je celkový odpor R_C obvodu s rezistorem $R_C = Z = \frac{U_1}{I} = \frac{UU_1}{P} =$
$= 276\ \Omega$ a do obvodu ještě musíme připojit odpor $R = R_C - R_ž = 132\ \Omega$.

Nahradíme-li odpor kondenzátorem, určíme kapacitu kondenzátoru ze vztahu

$$Z^2 = \left(\frac{U_1}{I}\right)^2 = R_ž^2 + X_C^2 = R_ž^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C_2^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2\pi f} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{U_1}{I}\right)^2 - R_ž^2}} = 13{,}5\ \mu\mathrm{F}.$$

Kdybychom kondenzátor nahradili ideální cívkou, pak ze vztahu

$$Z^2 = R_ž^2 + X_L^2 = R_ž^2 + 4\pi^2 f^2 L^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\left(\frac{U_1}{I}\right)^2 - R_ž^2} = 0,749\ \mathrm{H}$$

3 body

d) V obvodu je teď zapojena žárovka s odporem $R_ž = 144\ \Omega$, cívka o indukčnosti $L = 0{,}749$ H a kondenzátor o kapacitě $C_2 = 13{,}5\ \mu\mathrm{F}$. Aby žárovka stejně svítila, musí být i impedance stejná jako v předešlých případech tedy $Z = 276\ \Omega$. Protože $(X_L - X_C)^2 = Z^2 - R_ž^2$, bude $X_L - X_C = \pm\sqrt{Z^2 - R_ž^2}$,

$$\omega L - \frac{1}{\omega C_2} = \pm\sqrt{Z^2 - R_ž^2}.$$

Po úpravě dostáváme dvě kvadratické rovnice s neznámou ω

$$\omega^2 L C_2 \pm \omega C_2 \sqrt{Z^2 - R_ž^2} - 1 = 0.$$

Dosazením číselných hodnot dostáváme dvě rovnice:

$$1{,}01 \cdot 10^{-5} \left\{\omega^2\right\} \pm 3{,}18 \cdot 10^{-3} \{\omega\} - 1 = 0,$$

odkud $\{\omega_1\} = 509 \ \Rightarrow\ f_1 = 81$ Hz a $\{\omega_2\} = 194 \ \Rightarrow\ f_1 = 31$ Hz.

Žárovka tedy bude svítit stejně jako ve spotřebitelské síti při frekvencích 31 Hz nebo 81 Hz.

2 body