Úlohy 1. kola 58. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

1. Dva puky

Hokejový puk se pohybuje po ledě a rychlostí o velikosti v_0 narazí do druhého stejného puku, který je v klidu. Po nárazu se první puk pohybuje rychlostí o velikosti v, která svírá s původním směrem úhel $\alpha = 10°$, druhý puk se pohybuje rychlostí o velikosti u, která svírá s původním směrem úhel $\beta = 70°$. Určete:

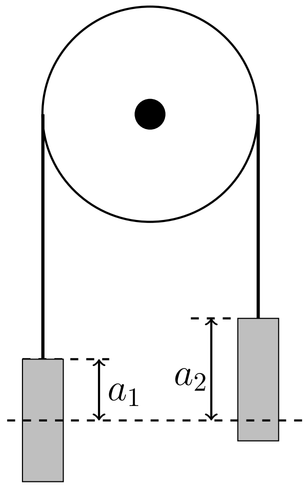
a) poměr velikostí rychlostí $\dfrac{v}{u}$,

b) poměr drah $\dfrac{s_1}{s_2}$, které puky urazily po srážce za předpokladu, že součinitel tření je na celé ledové ploše stejný,

c) kolik procent energie se při srážce přeměnilo na teplo.

2. Dvaválečky na kladce

Přes pevnou kladku zanedbatelné hmotnosti jsou na pevné nevažitelné niti zavěšeny dva válečky stejného průměru $d = 2{,}0$ cm, a stejné výšky $h_0 = 10{,}0$ cm. Hustota materiálu prvního válečku je $\rho_1 = 2\,700\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, druhého válečku $\rho_2 = 2\,300\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Oba válečky jsou částečně ponořeny ve vodě tak, že celý systém je v rovnováze (obr. 1). Výška horní podstavy levého válečku je ve výšce $a_1 = 3{,}0$ cm nad hladinou vody. Hustota vody $\rho_\mathrm{v} = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.



Obr. 1

a) V jaké výšce a_2 nad hladinou vody se nachází horní podstava druhého válečku?

b) Zaveďme souřadnou osu x orientovanou svisle vzhůru a s počátkem ve výši horní podstavy levého válečku v rovnovážné poloze soustavy. Vychylme nyní horní podstavu levého válečku o 10 cm níž, tj. do polohy $x_\mathrm{min} = -10$ cm (levý váleček je zcela zasunut pod vodu). Nakreslete graf závislosti složky F_x výsledné síly působící na levý váleček při otáčení systémem (ve směru hodinových ručiček) z této krajní polohy do druhé krajní polohy, ve které má horní podstava levého válečku souřadnici $x_\mathrm{max} = +10$ cm (pravý váleček se nachází pod hladinou). Odpor vody proti pohybu válečků zanedbejte.

c) Za jakých podmínek bude soustava konat harmonické kmity? Určete periodu těchto kmitů.

3. Prodloužení zahřátého drátu

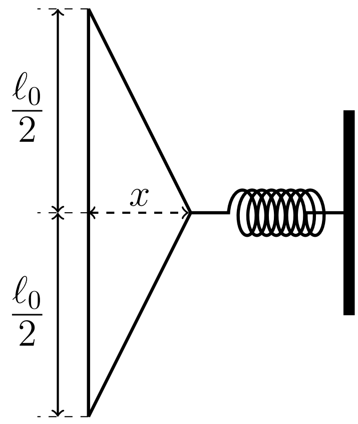
Mezi dvěma body, které jsou od sebe vzdáleny o $\ell_0 = 30{,}0$ cm je napjatý tenký měděný drát o odporu $R = 3{,}0\ \Omega$. Uprostřed drátu je kolmo k němu připevněna napjatá pružina. Bude-li drátem procházet po dobu $t = 0{,}50$ s proud $I = 0{,}30$ A, posune se bod, v němž je pružina upevněna, o vzdálenost x (viz obr. 2). Hustota mědi $\rho_m = 8900\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, součinitel teplotní roztažnosti mědi $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$, rezistivita mědi $\rho_e = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, měrná tepelná kapacita mědi $c_{\mathrm{Cu}} = 390\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Určete:

a) Změnu teploty drátku při průchodu proudu,

b) posunutí x středu drátku.

c) Dokažte, že pro výpočet x je možné použít přibližný vzorec $R \cdot I \cdot \sqrt{t}\sqrt{\dfrac{\alpha}{2\rho_m \rho_e c_{\mathrm{cu}}}}$.

Vypočítejte odchylku Δx a relativní odchylku δx při použití přibližného vzorce od skutečné hodnoty.
Řešte nejprve obecně, pak po dosazení číselných hodnot. Ztráty tepla do okolí zanedbejte.



Obr. 2

4. Dvě kyvadla

Dvě stejná kyvadla tvoří malá kulička zanedbatelného průměru zavěšená na pevné niti zanedbatelné hmotnosti. Obě kyvadla vychýlíme o úhel α z rovnovážné polohy. První kuličku uvolníme, takže bude kmitat jako matematické kyvadlo s periodou kmitů T_{M}. Druhé kuličce udělíme takovou rychlost, aby obíhala po kružnici ve vodorovné rovině, jako tzv. kuželové kyvadlo. Její doba oběhu pak bude T_{K}. Poměr $\dfrac{T_{\mathrm{K}}}{T_{\mathrm{M}}} = \dfrac{50}{51}$.

a) O jaký úhel α jsme kyvadla vychýlili?

b) Jaký je poměr velikostí sil napínajících nitě $\dfrac{F_{\mathrm{K}}}{F_{\mathrm{M}}}$, kde F_{K} je síla napínající nit u kuželového kyvadla a F_{M} je síla napínající nit při průchodu rovnovážnou polohou u matematického kyvadla? V řešení použijte výsledek části a).

Pro dobu kmitu matematického kyvadla platí pro malé výchylky α vztah:

$$T_{\mathrm{M}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \text{ kde } \alpha \text{ je úhel v radiánech.}$$

Pro $|x| \leq 1$ platí přibližné vztahy $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $\sqrt{1-x} \approx 1 - \dfrac{x}{2}$.

5. Měření specifického náboje elektronu

V r. 1926 použil Busch k určení specifického náboje elektronu Braunovu trubici umístěnou v homogenním magnetickém poli cívky (obr. 3). Elektrony vyletující ze žhavené katody byly urychlovány ve směru osy x napětím U_1. Štěrbinou pak procházely do elektrického pole kondenzátoru, jehož vodorovně položené obdélníkové desky měly jednu stranu o rozměru l rovnoběžnou s osou x, jejich vzdálenost byla d, napětí mezi nimi bylo U_2. Vzdálenost obrazovky od okraje desek byla s.

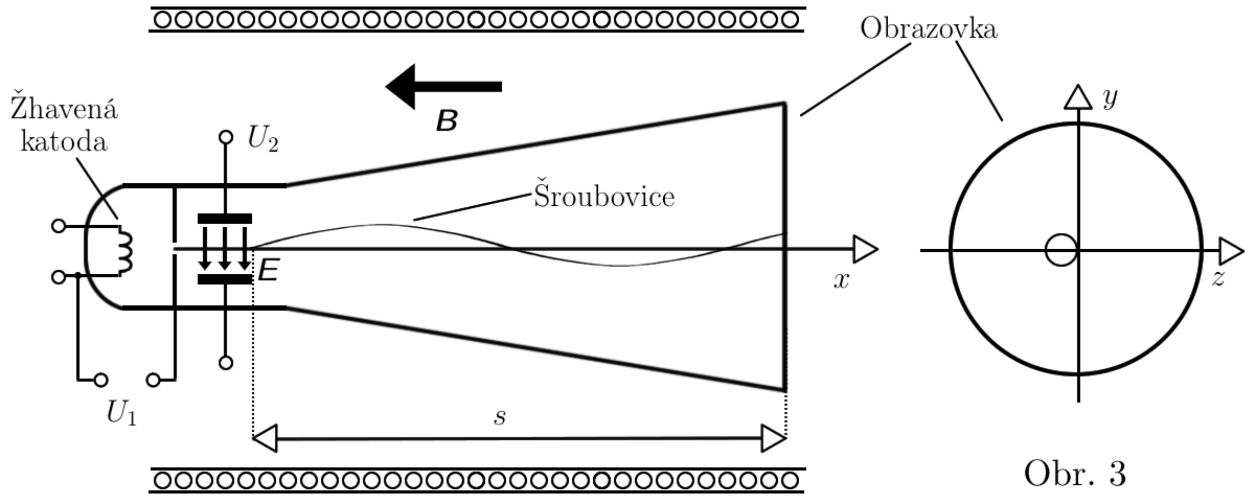
Celá trubice se nacházela v magnetickém poli cívky, jejíž indukci B bylo možno změnou proudu v cívce měnit.

a) Magnetické pole je nejprve vypnuté. Jaké budou souřadnice bodu dopadu elektronu na obrazovku? (Osu y volíme procházející na obrazovce svisle vzhůru, osa z doplňuje osy x, y na pravotočivý systém, viz obr. 3).

b) Po zapnutí magnetického pole se elektron bude pohybovat po šroubovici. Velikost indukce postupně zvětšujeme tak dlouho, dokud se svítící bod na obrazovce neobjeví uprostřed obrazovky v počátku souřadnic. Stane se to při velikosti magnetické indukce B_1. Určete specifický náboj elektronu $\frac{e}{m}$.

c) Jaký je v tomto případě poloměr šroubové trajektorie elektronu?

Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty: $U_1 = 800$ V, $U_2 = 200$ V, $l = 1{,}0$ cm, $d = 0{,}5$ cm, $s = 32{,}0$ cm, $B_1 = 1{,}88$ mT. Vzhledem k malým rozměrům desek kondenzátoru můžeme uvažovat, že šroubovice začíná až poté, kdy elektron opustí kondenzátor. Posunutí elektronového paprsku způsobené elektrickým polem ve směru osy y můžeme zanedbat.



Obr. 3

6. Měření elektrochemického ekvivalentu mědi

Teorie: Prochází-li elektrický proud nádobou s roztokem síranu měďnatého (modré skalice) $CuSO_4$ a měděnými elektrodami, anoda se rozpouští a na katodě se naopak vylučuje velmi čistá měď. Podle 1. Faradayova zákona pro elektrolýzu je hmotnost m vyloučené látky přímo úměrná prošlému náboji Q:

$$m = AQ = AIt\,.$$

Konstanta úměrnosti A je *elektrochemický ekvivalent* vylučované látky, v daném případě dvojmocné mědi.

Provedení úlohy: Použijeme školní soupravu pro pokusy z elektrolýzy (hranatá kádinka, dva držáky elektrod, elektrody). Do kádinky nalejeme roztok 0,5 molu modré skalice v 0,5 litru vody. Měděné elektrody očistíme smirkovým papírem a tu, kterou použijeme jako katodu, pečlivě zvážíme. Sestavíme soupravu tak, aby elektrody byly vzájemně rovnoběžné a ponořené části elektrod měly plošný obsah alespoň 25 cm^2. (Počítáme jen stranu přivrácenou k druhé elektrodě.) Soupravu připojíme k regulovatelnému zdroji stejnosměrného napětí nebo přes vhodný reostat ke zdroji stálého stejnosměrného napětí a po dostatečně dlouhou dobu (alespoň jednu hodinu) udržujeme stálý proud 0,5 A. Po vypnutí proudu vyjmeme katodu, opláchneme ji a osušíme proudem horkého vzduchu (neotíráme). Suchou elektrodu znovu zvážíme.

Úkol: Z hmotnosti mědi vyloučené na katodě a náboje, který prošel elektrolytem určete elektrochemický ekvivalent mědi. Zhodnoťte přesnost měření a odhadněte možnou chybu výsledku. Výsledek porovnejte s tabulkovou hodnotou.

7. Nabíjení kondenzátoru

Kondenzátor o kapacitě C byl nabíjen zdrojem o stálém napětí. Při nabíjení byl ke kondenzátoru sériově zapojen odpor $R = 500\ \Omega$. Závislost nabíjecího proudu na čase je zaznamenána v tabulce.

t/ms	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I/mA	20	17,50	15,32	13,41	11,73	10,27	8,99	7,86	6,88	6,02	5,27
t/ms	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
I/mA	4,61	4,04	3,53	3,09	2,71	2,37	2,07	1,81	1,59	1,39	1,22

a) Sestrojte v EXCELu graf závislosti nabíjecího proudu na čase a pomocí rovnice regrese určete kapacitu kondenzátoru. (Nabíjecí proud závisí na čase podle vzorce $I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}$.

b) Jiný kondenzátor o kapacitě C_1 a odpor $R = 500\ \Omega$ byly připojeny sériově ke generátoru střídavého napětí o efektivní hodnotě $U = 10{,}0$ V s proměnnou frekvencí. Závislost procházejícího proudu na frekvenci je uvedena v tabulce.

f/Hz	10,0	15,0	20,0	30,0	50,0
I/mA	8,52	11,54	13,72	16,33	18,41

Sestrojte v EXCELu graf závislosti převrácené hodnoty druhé mocniny efektivní hodnoty proudu $1/I^2$ na druhé mocnině převrácené hodnoty frekvence $1/f^2$, pomocí rovnice regrese vypočítejte kapacitu kondenzátoru C_1.

c) Máme k dispozici žárovku se jmenovitými hodnotami 120 V/100 W a chceme ji připojit na síť s napětím $U_1 = 230$ V. Jaký odpor R musí mít rezistor, který zařadíme sériově se žárovkou, aby žárovka normálně svítila? Jakou kapacitu C_2 by musel mít kondenzátor, který bychom zařadili místo odporu R, aby žárovka normálně svítila? Jakou indukčnost L by musela mít ideální cívka, kterou bychom zařadili místo odporu R, aby žárovka normálně svítila? Frekvence střídavého proudu v síti je $f = 50{,}0$ Hz.

d) Ke stejné žárovce zařadíme sériově kondenzátor o kapacitě C_2 a cívku o indukčnosti L z části c). Obvod připojíme ke generátoru střídavého napětí o efektivní hodnotě $U_1 = 230$ V s proměnnou frekvencí. Při jakých frekvencích bude žárovka normálně svítit?