Řešení úloh krajského kola 58. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autor úloh: J. Thomas

1.a) Doba letu střely od okamžiku výstřelu do zásahu označíme t. V okamžiku výstřelu se husa nachází ve vzdálenosti $s = \dfrac{h}{\mathrm{tg}\alpha}$, měřené ve vodorovném směru. Za dobu t uletí ještě vzdálenost ut. Platí tedy

$$\frac{h}{\mathrm{tg}\alpha} + ut = v_0 t \cos\alpha. \tag{1}$$

Střela za dobu t dosáhne výšky

$$h = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) vyloučíme čas: $t = \dfrac{h}{(v_0\cos\alpha - u)\ \mathrm{tg}\alpha}$.

$$h = v_0 \frac{h\sin\alpha}{(v_0\cos\alpha - u)\ \mathrm{tg}\alpha} - \frac{gh^2}{2(v_0\cos\alpha - u)^2 \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Po úpravě

$$h = \frac{2(v_0\cos\alpha - u)^2\mathrm{tg}^2\alpha}{g}\left[\frac{v_0\sin\alpha}{(v_0\cos\alpha - u)\ \mathrm{tg}\alpha} - 1\right] = \frac{2\,(v_0\cos\alpha - u)\,u\ \mathrm{tg}^2\alpha}{g}.$$

Musí být splněna podmínka: $v_0\cos\alpha > u$, jinak by střela husu nedostihla. Číselně: $h = 132$ m. **5 bodů**

b) Ze zákona zachování energie $\dfrac{mv_0^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + mgh$ zjistíme velikost rychlosti střely ve výšce h:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{v_0^2 - 4\,(v_0\cos\alpha - u)\ u\ \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Rychlost svírá s vodorovným směrem úhel β, pro který platí:

$$\cos\beta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 - 4\,(v_0\cos\alpha - u)\ u\ \mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

Číselně: $v = 140\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\beta = 58°$. **3 body**

c) Od okamžiku zásahu se tělo husy pohybuje vrhem vodorovným s počáteční rychlostí u. Zasažená husa dopadne na zem ve vzdálenosti

$$\frac{h}{\mathrm{tg}\alpha} + ut + u\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{h}{\mathrm{tg}\alpha} + u\frac{h}{(v_0\cos\alpha - u)\ \mathrm{tg}\alpha} + u\sqrt{\frac{2h}{g}} = 95\ \mathrm{m}$$

od místa, odkud lovec vystřelil. **2 body**

2.a) Bude-li R odpor ve vnější části obvodu a r vnitřní odpor zdroje, platí pro účinnost přenosu energie v obvodu:

$$\eta = \frac{RI^2}{(r+R)I^2} = \frac{R}{r+R} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{r\eta}{1-\eta} \tag{1}$$

a pro tepelný výkon na vnějším odporu

$$P = RI^2 = \frac{RU_\mathrm{e}^2}{(r+R)^2} = \frac{U_\mathrm{e}^2\eta^2}{R} = \frac{U_\mathrm{e}^2\eta(1-\eta)}{r}.$$

Protože $P_1 = \dfrac{U_\mathrm{e}^2\eta_1(1-\eta_1)}{r}$ a $P_2 = \dfrac{U_\mathrm{e}^2\eta_2(1-\eta_2)}{r}$, dostaneme vydělením

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\eta_1(1-\eta_1)}{\eta_2(1-\eta_2)}. \tag{2}$$

Úpravou obdržíme kvadratickou rovnici $P_1\eta_2^2 - P_1\eta_2 + P_2\eta_1(1-\eta_1) = 0$.

Rovnice má dva kořeny: $\eta_2 = \dfrac{P_1 \pm \sqrt{P_1^2 - 4P_1P_2\eta_1(1-\eta_1)}}{2P_1}$,

po dosazení $\eta_{21} = 0{,}25$ a $\eta_{22} = 0{,}75$.

První kořen odpovídá situaci, kdy je $R_2 < r$, druhý situaci, kdy $R_2 > r$.

4 body

b) Podle (1) odpovídá účinnosti η_1 odpor $R_1 = \dfrac{r\eta_1}{1-\eta_1} = r$, účinnosti η_{21} odpor $R_{21} = \dfrac{r\eta_{21}}{1-\eta_{21}} = \dfrac{r}{3}$ a účinnosti η_{22} odpor $R_{22} = \dfrac{r\eta_{22}}{1-\eta_{22}} = 3r$.

2 body

Při sériovém zapojení rezistorů $\eta_3 = \dfrac{R_1+R_2}{r+R_1+R_2}$. Pro účinnost dostáváme dvě možné hodnoty $\eta_{31} = 0{,}57$ a $\eta_{32} = 0{,}8$. Výkon na rezistorech vyjádříme pomocí vztahu (2): $P_3 = P_1\dfrac{\eta_3(1-\eta_3)}{\eta_1(1-\eta_1)}$.

Číselně $P_{31} = 9{,}8$ W a $P_{32} = 6{,}4$ W. **2 body**

c) Při paralelním zapojení rezistorů $\eta_4 = \dfrac{\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}{r+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$. Opět dostáváme dvě možné hodnoty $\eta_{41} = 0{,}2$ a $\eta_{42} = 0{,}43$ a odpovídající výkony $P_{41} = 6{,}4$ W a $P_{42} = 9{,}8$ W.

2 body

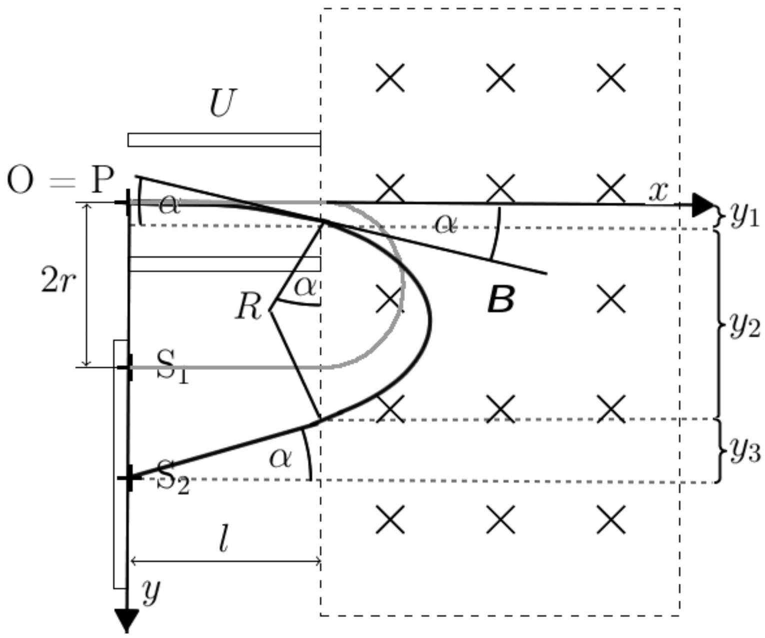
3.a) Nebude-li na kondenzátoru napětí, budou se elektrony v magnetickém poli pohybovat po půlkružnici s poloměrem $r = \dfrac{\overline{\mathrm{PS_1}}}{2}$. Dostředivou silou je síla magnetická, pak

$$Bev_0 = \frac{m_e v_0^2}{r} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m_e v_0}{er} = 6{,}5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Po vložení napětí na desky kondenzátoru se elektrony mezi deskami pohybují po trajektorii ve tvaru části paraboly a opouští elektrické pole v místě o souřadnici

$$y_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{eU}{2m_e d}\cdot\frac{l^2}{v_0^2} = 1{,}4\ \mathrm{cm}$$

rychlostí, jejíž složky jsou $v_x = v_0$ a $v_y = at = \dfrac{eUl}{m_e d v_0}$.



Výstupní rychlost $\boldsymbol{v}$ pak svírá se vstupní rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ úhel α, pro který platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{eUl}{m_e d v_0^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 19{,}4^\circ$$

a její velikost je $v = \dfrac{v_0}{\cos\alpha} = 4{,}24 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

V magnetickém poli se pak elektrony pohybují stálou rychlostí v po části kružnice s poloměrem

$$R = \frac{m_e v}{eB} = \frac{\dfrac{m_e v_0}{\cos\alpha}}{e\dfrac{m_e v_0}{er}} = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{\overline{\mathrm{PS}_1}}{2\cos\alpha} = 3{,}7\,\mathrm{cm}.$$

Z magnetického pole elektrony vystoupí ve vzdálenosti $y_2 = 2R\cos\alpha = 2r = \overline{\mathrm{PS}_1} = 7$ cm, která nezávisí na napětí mezi deskami kondenzátoru, a dále se pohybují po přímce, která svírá s rovinou desek kondenzátoru úhel α a na stínítku dopadnou ve vzdálenosti

$$\overline{\mathrm{PS}_2} = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{eU}{2m_e d}\cdot\frac{l^2}{v_0^2} + 2R\cos\alpha + l\cdot\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{eU}{2m_e d}\cdot\frac{l^2}{v_0^2} + 2r + \frac{eUl^2}{m_e d v_0^2} = \frac{3eU}{2m_e d}\cdot\frac{l^2}{v_0^2} + 2r = 0{,}112\,\mathrm{m} = 11{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Elektrony tedy dopadají na stínítko ve vzdálenosti 11,2 cm od bodu P rychlostí o velikosti $v = 4{,}24 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod úhlem $\alpha = 19{,}4^\circ$ (měřeno od kolmice ke stínítku). **5 bodů**

b) Napětí U_1 může být nejvýše takové, aby elektrony ještě procházely mezi deskami a nedopadaly na jednu z nich. V tomto případě platí

$$y'_1 = \frac{d}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{eU_1}{2m_e d} \cdot \frac{l^2}{v_0^2} \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{m_e d^2 v_0^2}{el^2} = 51{,}2 \text{ V}.$$

Pak $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v_y}{v_0} = \dfrac{eU_1 l}{m_e d v_0^2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 36{,}7°$, velikost rychlosti dopadu $v_1 =$ $= \dfrac{v_0}{\cos\beta} = 5{,}0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a vzdálenost

$$\overline{\mathrm{PS}_3} = y'_1 + y'_2 + y'_3 = \frac{d}{2} + \overline{\mathrm{PS}_1} + \frac{eU_1 l^2}{m_e d v_0^2} = 3{,}0 \text{ cm} + 7{,}0\,; \text{cm} + 6{,}0 \text{ cm} = 16{,}0 \text{ cm}.$$

Aby elektrony dopadaly ještě na stínítko, musí být napětí U_1 menší než 51,2 V. Elektrony budou dopadat nejdále do bodu S_3 vzdáleném od bodu P o $\overline{\mathrm{PS}_3} =$ $= 16{,}0$ cm, rychlostí o velikosti $v_1 = 5{,}0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, která svírá s kolmicí ke stínítku úhel $\beta = 36{,}7°$. **4 body**

4.a) Protože ampérmetrem má procházet minimální proud, musí být frekvence nastavena na nejnižší hodnotu, stejně tak i kapacita kondenzátoru C_1, zatímco odpor musí být nastaven na hodnotu největší. **1 bod**

Nejprve určíme impedanci Z_2 paralelního spojení druhého kondenzátoru a cívky. Protože napětí je na obou prvcích stejné a na kapacitě proud předbíhá napětí o $\dfrac{\pi}{2}$ (obr. 2), platí

$$\sqrt{I_R^2 + I_{C2}^2} = \frac{U_2}{Z_2} = U_2\sqrt{\frac{1}{R^2} + (2\pi f C_2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Z_2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (2\pi f C_2)^2}$$

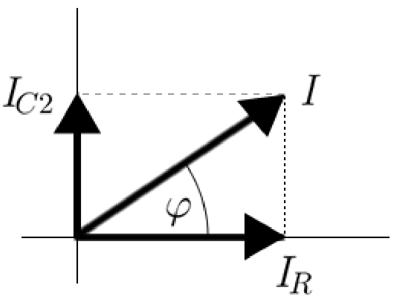
$$\Rightarrow \quad Z_2 = \frac{R}{\sqrt{(1 + (2\pi f R C_2)^2}} = 477\ \Omega.$$

Proud předbíhá napětí o úhel φ, pro který platí $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{R}{X_C} = R\omega C_2$, tedy o $\varphi = 17{,}4°$. **4 body**

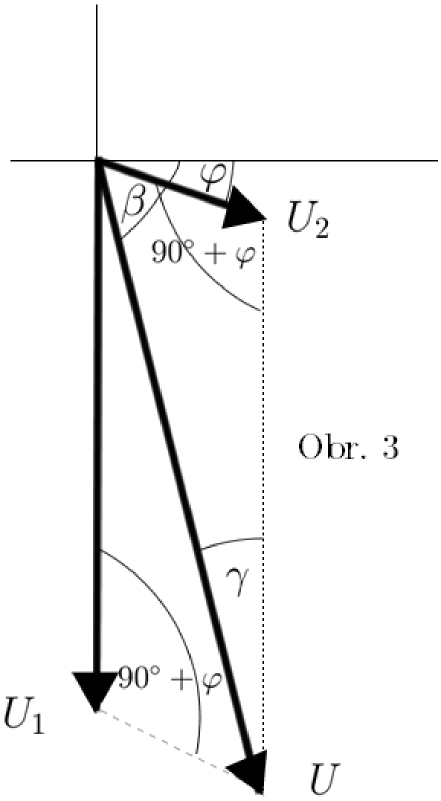
Impedance prvního kondenzátoru $Z_1 = X_{C1} = \dfrac{1}{\omega C_1} = 3\,183\ \Omega$, proud předbíhá napětí o $\dfrac{\pi}{2}$, fázory napětí na paralelním spojení odporu s kondenzátorem a na prvním kondenzátoru spolu svírají úhel $90° - \varphi = 72{,}6°$ (obr. 3). Pak podle kosinové věty celková impedance

$$Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_1Z_2\cos(90° + \varphi)} = 3\ 357\ \Omega.$$

Minimální hodnota proudu je pak $I_{\min} = \dfrac{U}{Z} = 2{,}98\,\text{mA}$. **3 body**



Obr. 2



Obr. 3

Fázové posunutí mezi napětím a proudem bude $\beta = 90° - \gamma$. Úhel γ určíme pomocí sinové věty:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(90° + \varphi)} = \frac{Z_2}{Z} \;\Rightarrow\; \sin\gamma = \frac{Z_2}{Z}\sin(90°+\varphi) = 0{,}135\,6 \;\Rightarrow\; \gamma = 7{,}8° \text{ a } \beta = 82{,}2°.$$

2 body

Řešení symbolickou metodou: $\overline{Z_1} = \dfrac{1}{j\omega C_1}$, $\dfrac{1}{\overline{Z_2}} = \dfrac{1}{R} + j\omega C_2$.

$$\overline{Z} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C_2} = \frac{R}{1 + (R\omega C_2)^2} - j\left[\frac{R^2\omega C_2}{1 + (R\omega C_2)^2} + \frac{1}{\omega C_1}\right],$$

$$Z = \sqrt{\left[\frac{R}{1 + (R\omega C_2)^2}\right]^2 + \left[\frac{R^2\omega C_2}{1 + (R\omega C_2)^2} + \frac{1}{\omega C_1}\right]^2} = 3\,357\,\Omega,$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\dfrac{R^2\omega C_2}{1 + (R\omega C_2)^2} + \dfrac{1}{\omega C_1}}{\dfrac{R}{1 + (R\omega C_2)^2}} = 7{,}3 \quad\Rightarrow\quad \beta = 82{,}2°.$$