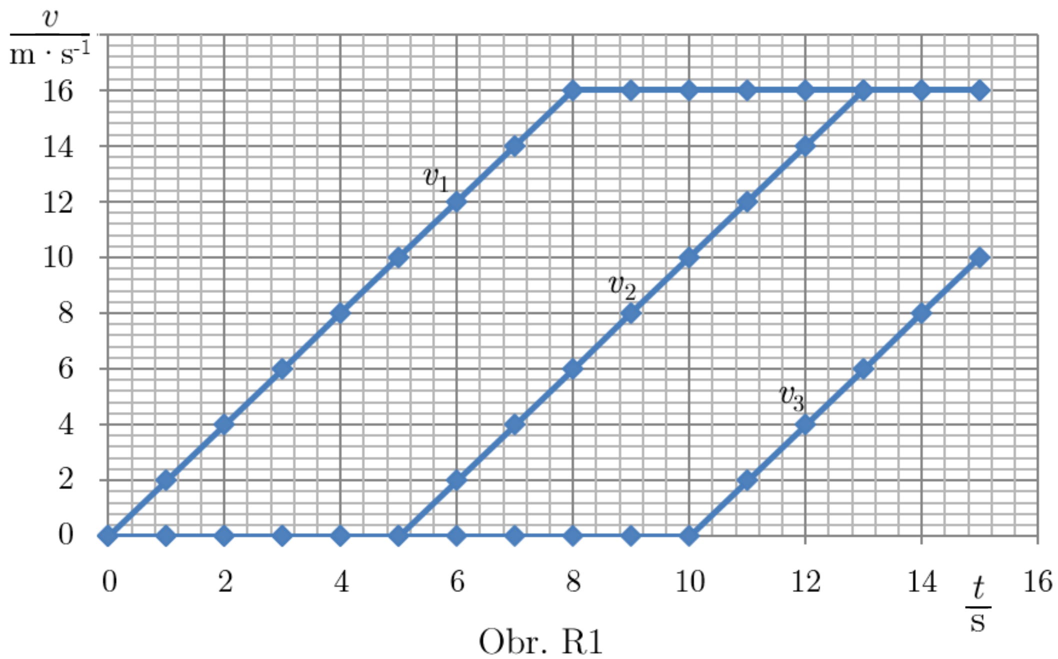
Řešení úloh 1. kola 58. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 5, 6, 7), J. Jírů (3), L. Ledvina (4)

1.a) Na dosažení rychlosti v_0 potřebuje každý automobil dobu $t = \frac{v_0}{a_0} = 8{,}0$ s. Za tuto dobu ujede automobil vzdálenost $s = \frac{v_0^2}{2a_0} = 64$ m. Druhý automobil se musí začít rozjíždět později tak, aby platilo $l_1 - l_0 = \frac{a_0 t_1^2}{2}$, tedy o dobu $t_1 = \sqrt{\frac{2(l_1 - l_0)}{a_0}} = 5$ s po výjezdu 1. vozidla, tedy o $t - t_1 = 3,0$ s dříve, než první automobil dosáhne rychlosti v_0, třetí vozidlo 5 sekund po startu druhého vozidla atd. Graf závislosti rychlosti prvních tří vozidel na čase je na obr. R1.

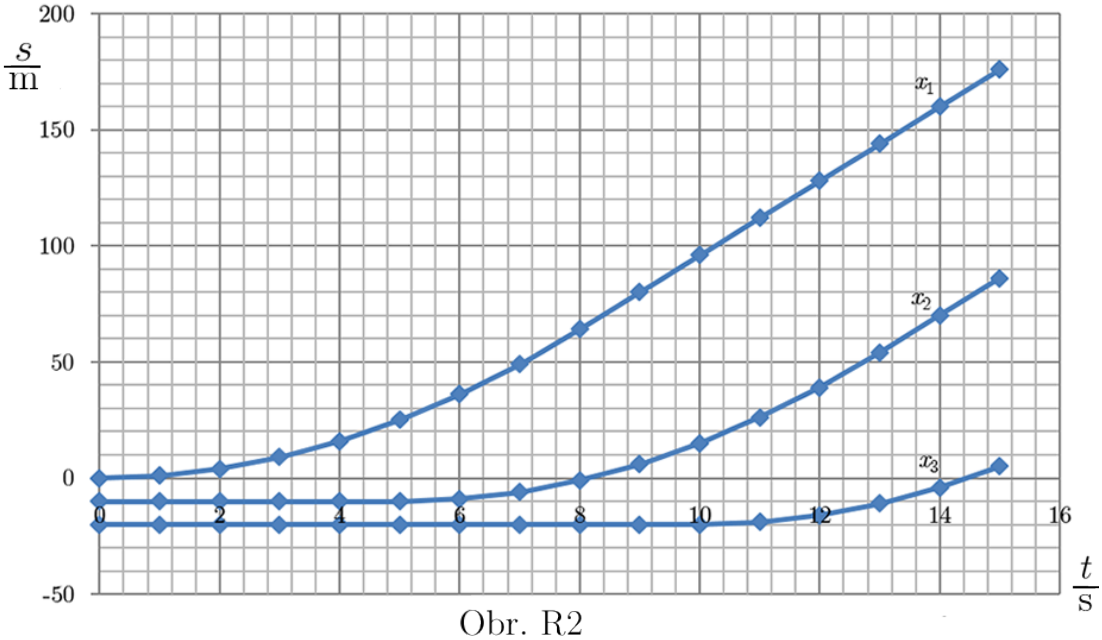
$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{v_1}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	16	16	16	16	16	16	16
$\frac{v_2}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	0	0	0	0	0	0	2	4	6	8	10	12	14	16	16	16
$\frac{v_3}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	6	8	10



Obr. R1

Graf závislosti polohy na čase pro první tři vozidla je na obr. R2.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{x_1}{\mathrm{m}}$	0	1	4	9	16	25	36	49	64	80	96	112	128	144	160	176
$\frac{x_2}{\mathrm{m}}$	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-9	-6	-1	6	15	26	39	54	70	86
$\frac{x_3}{\mathrm{m}}$	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-20	-19	-16	-11	-4	5



Obr. R2

5 bodů

b) Vzdálenost mezi čely vozidel kolony můžeme určit buď jako obsah plochy z grafu závislosti rychlosti na čase (přičteme počáteční vzdálenost čel vozidel), nebo odečíst přímo z grafu závislosti dráhy na čase

$$\Delta l = v_0 t + l_0 = 90 \text{ m}.$$

Vzdálenost mezi vozidly pak bude o délku vozidla kratší $\Delta l - d = 85$ m.

2 body

c) Celková délka kolony při jejím pohybu pak bude $L = (N-1)\,\Delta l + d = 1\,715$ m.

1 bod

d) Při brzdění se musí vzdálenost čel automobilů zmenšit z Δl na l_0. Proto musí druhý automobil začít brzdit o $\tau = \dfrac{\Delta l - l_0}{v_0} = 5{,}0$ s s později, než první automobil. Na velikosti zrychlení tato doba nezávisí. **2 body**

2. a) Kruhová rychlost družice je $v_k = \sqrt{\dfrac{GM_Z}{R_Z + h}}$.

Družice na oběžné dráze má jak energii kinetickou, tak energii potenciální; na vynesení družice bylo potřeba vykonat práci

$$W = E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2} m v_k^2 + GM_Z m \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_Z + h}\right) = \frac{1}{2} m \frac{GM_Z}{R_Z + h} +$$

$$+ GM_Z m \left[\frac{h}{R_Z (R_Z + h)}\right] = GM_Z m \left[\frac{R_Z + 2h}{2R_Z (R_Z + h)}\right] = 9{,}8 \cdot 10^{10} \text{ J}.$$

5 bodů

b) Radiální složka rychlosti pohybující se družice $v_r = \dfrac{\Delta h}{t} = 5 \cdot 10^{-3}$ m·s^{-1}. Protože je tato složka v porovnání s kruhovou rychlostí zanedbatelně malá, můžeme velikost rychlosti družice na oběžné dráze považovat za stálou. **2 body**

c) Energie družice na oběžné dráze

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv_k^2 - \frac{GM_Zm}{R_Z + h} = -\frac{GM_Zm}{2\,(R_Z + h)}$$

se změní o

$$\Delta E = F \cdot s = F \cdot v_k \cdot t = -\frac{GM_Zm}{2\,(R_Z + h)} + \frac{GM_Zm}{2\,(R_Z + h - \Delta h)} =$$

$$= \frac{GM_Zm}{2}\left[\frac{\Delta h}{(R_Z + h)\,(R_Z + h - \Delta h)}\right].$$

Pak $F = \dfrac{\Delta E}{v_k t} = \dfrac{GM_Zm\left[\dfrac{\Delta h}{(R_Z + h)\,(R_Z + h - \Delta h)}\right]}{2t \cdot \sqrt{\dfrac{GM_Z}{R_Z + h}}} =$

$$= \frac{m\Delta h}{2t\,(R_Z + h - \Delta h)}\sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z + h}} = 0{,}009\ \mathrm{N}.$$

3 body

3.a) V první fázi se plyn izochoricky ohřívá do okamžiku, kdy tíhová síla pístu je v rovnováze s přírůstkem tlakové síly vzduchu působící na vnitřní plochu pístu. Označíme-li T_1 konečnou teplotu vzduchu tohoto děje, pak platí

$$\frac{p_a}{T_0} = \frac{p_a + \dfrac{mg}{S}}{T_1}.$$

Z rovnice plyne

$$T_1 = \left(\frac{mg}{p_aS} + 1\right)T_0. \tag{1}$$

V druhé fázi se plyn izobaricky rozpíná, přitom platí

$$T = \frac{Sh}{Sh_0}T_1 = \frac{h}{h_0}\left(\frac{mg}{p_aS} + 1\right)T_0 = 955\ \mathrm{K}. \tag{2}$$

3 body

b) Teplo přijaté vzduchem při izochorickém ději je

$$Q_V = \frac{5}{2}nR\,(T_1 - T_0)\,,$$

kde

$$n = \frac{p_aSh_0}{RT_0}. \tag{3}$$

Užitím rovnic (1) a (3) dostaneme

$$Q_V = \frac{5}{2}mgh_0.$$

Teplo přijaté vzduchem při izobarickém ději je

$$Q_p = \frac{7}{2}nR\,(T - T_1)\,,$$

dosazením rovnic (1), (2) a (3) dostaneme

$$Q_p = \frac{7}{2} \cdot \frac{p_a S h_0}{RT_0} \cdot R \left(\frac{h}{h_0} T_1 - T_1 \right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{p_a S h_0}{RT_0} \cdot R \frac{h - h_0}{h_0} \cdot \frac{mg + p_a S}{p_a S} T_0 = $$

$$= \frac{7}{2} \left(h - h_0 \right) \left(mg + p_a S \right) .$$

Celkové dodané teplo je

$$Q = Q_V + Q_p = \frac{5}{2} mgh_0 + \frac{7}{2} \left(h - h_0 \right) \left(mg + p_a S \right) =$$

$$= mg \left(\frac{7}{2} h - h_0 \right) + \frac{7}{2} p_a S \left(h - h_0 \right) = 1{,}16 \text{ kJ}.$$

4 body

c) Plyn při rozpínání vykoná mechanickou práci

$$W = mg(h - h_0).$$

Účinnost pak je $\eta = \dfrac{W}{Q} = \dfrac{mg\left(h - h_0\right)}{mg\left(\frac{7}{2}h - h_0\right) + \frac{7}{2} p_a S \left(h - h_0\right)} =$

$$= \frac{2\left(h - h_0\right)}{7h - 2h_0 + 7\frac{p_a S}{mg}\left(h - h_0\right)} = 0{,}0380.$$

3 body

4.a) Pro tlak uvnitř balonku platí

$$P_{\text{in},0} = \frac{4\sigma}{R_0} = 2{,}0 \text{ kPa} .$$

1 bod

b) Použitím stavové rovnice pro ideální plyn uvnitř balonku dostáváme

$$p_{\text{in},0} \cdot \frac{4}{3} \pi R_0^3 = p_{\text{in}} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \Rightarrow \quad p_{\text{in}} = p_{\text{in},0} \cdot \frac{R_0^3}{R^3} . \tag{1}$$

2 body

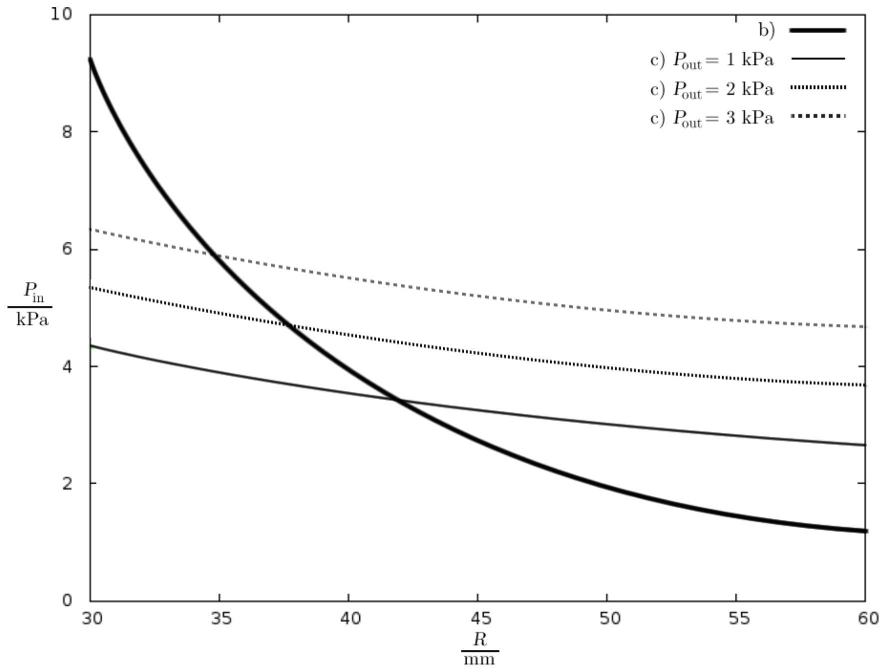
c) Nyní využijeme znalosti, že povrchového napětí blány způsobuje rozdíl tlaků uvnitř a vně balonku. Pro tlak uvnitř můžeme psát

$$p_{\text{in}} = p_{\text{out}} + \frac{4\sigma}{R} . \tag{2}$$

2 body

d) Viz obr. R3. **3 body**

e) Protože musí být splněny obě rovnice (1) i (2), jde o průsečíky křivek z úkolu b) a c). $R(p_{\text{out}} = 1 \text{ kPa}) = 42$ mm, $R(p_{\text{out}} = 2 \text{ kPa}) = 38$ mm, $R(p_{\text{out}} = 3 \text{ kPa}) =$ $= 35$ mm. **2 body**



Obr. R3

5.a) Označme $\dfrac{P}{S}$ tepelný výkon vařiče připadající na plochu dna S. Hmotnost vody, která se vypaří z kotlíku za dobu τ, bude $m = \rho S h$. Za tuto dobu bylo vodě dodáno teplo

$$P \cdot \tau = m l_v = \rho S h l_v .$$

Na plochu dna tedy připadá tepelný výkon

$$\frac{P}{S} = \frac{\rho h l_v}{\tau} = 1{,}2 \cdot 10^5 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}} .$$

Hmotnost vody, která spadne do kotlíku za dobu τ_1, je $M = N m_0 = n S v \tau_1 m_0$, kde N je počet kapek, které dopadnou do kotlíku za daný čas.
Teplo potřebné k ohřátí této vody na bod varu je

$$\frac{P_1}{S} = c m_0 n v \left(t_v - t_0\right) = 3{,}0 \cdot 10^4 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}} .$$

Protože $\dfrac{P_1}{S} < \dfrac{P}{S}$, bude voda vřít i za deště. **6 bodů**

b) I za deště se bude voda z kotlíku vypařovat, avšak pomaleji. Hmotnost vypařené vody v čase τ_1 je dána funkčním vztahem $M_v\left(\tau_1\right) = \dfrac{\left(P - P_1\right)\tau_1}{l_v}$.
Přírůstek hmotnosti vody v kotlíku v závislosti na čase pak bude

$$\Delta M\left(\tau_1\right) = M\left(\tau_1\right) - M_v\left(\tau_1\right) = n S v \tau_1 m_0 - \frac{\left(P - P_1\right)\tau_1}{l_v} = \left(n S v m_0 - \frac{P - P_1}{l_v}\right)\tau_1$$

a hladina se bude zvedat o

$$x\left(\tau_1\right) = \frac{\Delta M\left(\tau_1\right)}{\rho S} = \left(\frac{n v m_0}{\rho} - \frac{\rho h l_v - c m_0 n v \left(t_v - t_0\right)\tau}{\rho \tau l_v}\right)\tau_1 = k\tau_1 ,$$

kde $k = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$ m $\cdot$ s^{-1}. Doba, za kterou dosáhne hladina původní úroveň, bude $\tau_2 = \dfrac{h}{k} = 490$ s. **4 body**

Alternativní řešení části b): Výkon, kterým se voda před deštěm při varu vypařovala, je roven součtu výkonu potřebného k ohřevu dešťové vody na teplotu varu a výkonu potřebného k vypaření části dešťové vody:

$$\frac{\rho S h l_v}{\tau} = n m_0 S v c (t_v - t_0) + \left(n m_0 S v - \frac{\rho S h}{\tau_2} \right) l_v .$$

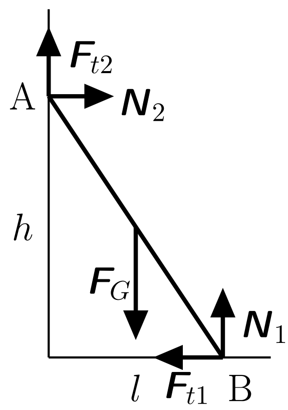
Z rovnice plyne

$$\tau_2 = \frac{\rho h l_v \tau}{n m_0 v \left[c(t_v - t_0) + l_v \right] \tau - \rho h l_v} .$$

6.a) Těleso na nakloněné rovině se začne pohybovat rovnoměrně, když bude splněna podmínka

$$a = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = \mathrm{tg}\alpha .$$

Vztah (2) odvodíme z rovnováhy sil a jednoho ze vztahů pro rovnováhu momentů sil, které na soustavu působí:
Z rovnováhy sil $f_1 N_1 = N_2$ a z rovnováhy momentů $N_2 h + f N_2 l = mg\dfrac{l}{2}$ (vzhledem k ose otáčení procházející kolmo k nákresně bodem B) a $N_1 l = f_1 N_1 h + mg\dfrac{l}{2}$ (vzhledem k ose otáčení procházející kolmo k nákresně bodem A) úpravou



Obr. R4

$$N_2 h + f N_2 l = N_1 l - f_1 N_1 h ,$$
$$f_1 N_1 h + f f_1 N_1 l = N_1 l - f_1 N_1 h ,$$
$$2 f_1 h + f f_1 l = l \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{l}{2h + fl} .$$

b) Plastové pravítko na dřevěném

$\dfrac{a}{\text{cm}}$	$\dfrac{b}{\text{cm}}$	$f = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$
13,0	50,0	0,26
14,5	50,0	0,29
16,5	49,5	0,33
13,5	50,0	0,27
12,0	49,0	0,35

Kovové pravítko na dřevěném

$\dfrac{a}{\text{cm}}$	$\dfrac{b}{\text{cm}}$	$f = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$
12,0	51,0	0,24
13,0	50,5	0,26
15,0	49,5	0,30
14,5	50,5	0,29
14,5	50,5	0,29

Součinitel tření pro plastové pravítko na dřevěném je $f = (0{,}30 \pm 0{,}04)$ s relativní odchylkou 13,3 %, pro kovové pravítko na dřevěném $f = (0{,}28 \pm 0{,}03)$ s relativní odchylkou 9,1 %.

Plastové pravítko na stolní desce opřené o dřevěné pravítko (tabulka vlevo), kovové pravítko na stolní desce opřené o dřevěné pravítko (tabulka vpravo):

$\frac{l}{\mathrm{cm}}$	$\frac{h}{\mathrm{cm}}$	$f_1 = \frac{l}{2h+fl}$
12,0	29,0	0,195
12,7	29,3	0,203
12,9	29,2	0,207
12,5	29,4	0,200
12,6	29,2	0,203

$\frac{l}{\mathrm{cm}}$	$\frac{h}{\mathrm{cm}}$	$f_1 = \frac{l}{2h+fl}$
14,1	39,0	0,172
14,8	38,8	0,181
14,5	39,0	0,177
14,4	39,1	0,175
14,2	39,0	0,174

Součinitel tření je pro plastové pravítko na stolní desce opřené o dřevěné pravítko roven $f = (0{,}202 \pm 0{,}004)$ s relativní odchylkou 2,2 %, pro kovové pravítko na stolní desce, opřené o dřevěné pravítko $f = (0{,}176 \pm 0{,}003)$ s relativní odchylkou 1,9 %.

7. a) Hmotnost prázdné lodi označme m. Při plování prázdné lodi platí

$$mg = \rho gab(c - h). \tag{3}$$

Potopí-li se loď tak, že výška horního okraje lodi nad hladinou vody bude h_1 a výška vody uvnitř lodi bude l (obr. R5), pak bude platit

$$mg + \rho gabl = \rho gab(c - h_1). \tag{4}$$

Porovnáním vztahů (1) a (2) dostaneme

$$c - h_1 - l = c - h.$$

Rozdíl úrovní hladin vně a uvnitř lodi je tedy časově stálý a je roven počátečnímu rozdílu $c - h = 1{,}5$ m.

b) Je-li stejný rozdíl hladin vně a uvnitř lodi, je i stejný rozdíl tlaků v úrovni otvoru a pak podle Bernoulliho rovnice proudí voda do lodi stále stejnou rychlostí. Platí

$$p_0 + \rho g(c - h_1) - (p_0 + \rho gl) = \rho g(c - h_1 - l) = \rho g(c - h) = \frac{\rho v^2}{2},$$

kde p_0 je atmosférický tlak, v je rychlost vody v otvoru a ρ je hustota vody. Pro rychlost vody v otvoru pak dostaneme

$$v = \sqrt{2g(c - h)} = 5{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

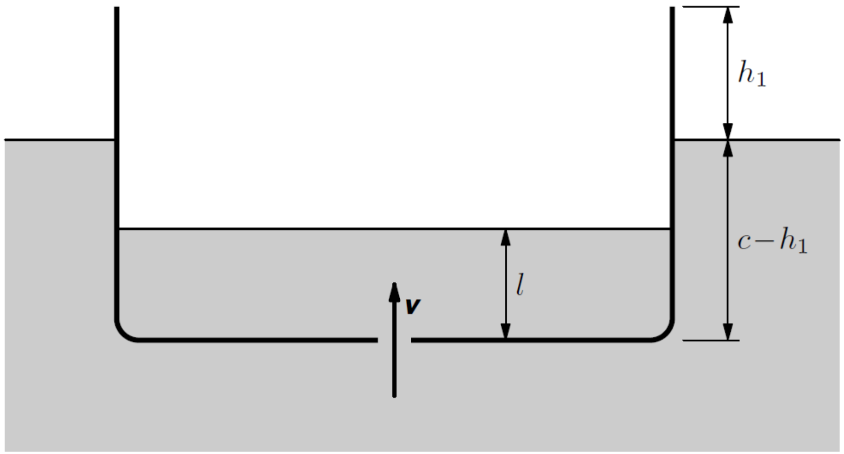
c) Loď se začne potápět, když bude okolní voda v úrovni jejího horního okraje. Voda uvnitř lodi bude mít v té chvíli objem

$$V = abh = \frac{\pi d^2}{4} v \Delta t.$$

Z toho

$$\Delta t = \frac{4abh}{\pi d^2 \sqrt{2g(c - h)}} = 1{,}03 \cdot 10^6\ \mathrm{s} = 285\ \mathrm{h} = 12\ \text{dnů}.$$

3 body



Obr. R5