**Řešení úloh 1. kola 58. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

**1.**a) Označme $v_\mathrm{a}$ velikost rychlosti atleta, $v_\mathrm{t}$ velikost rychlosti trenéra. Trenér do prvního setkání ušel dráhu

$$s_1 = d - v_\mathrm{a} t_1,$$

kde

$$v_\mathrm{a} = \frac{d}{t_2}. \tag{1}$$

Po dosazení dostaneme

$$s_1 = d\frac{t_2 - t_1}{t_2} = 71\ \mathrm{m}. \tag{2}$$

**3 body**

b) Pro hledaný čas platí

$$t_3 = \frac{d}{v_\mathrm{t}},$$

kde

$$v_t = \frac{s_1}{t_1}.$$

Po dosazení a užití vztahu (2) dostaneme

$$t_3 = \frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 446\ \mathrm{s}. \tag{3}$$

**4 body**

c) Dráha atleta je

$$s = v_\mathrm{a} t_3.$$

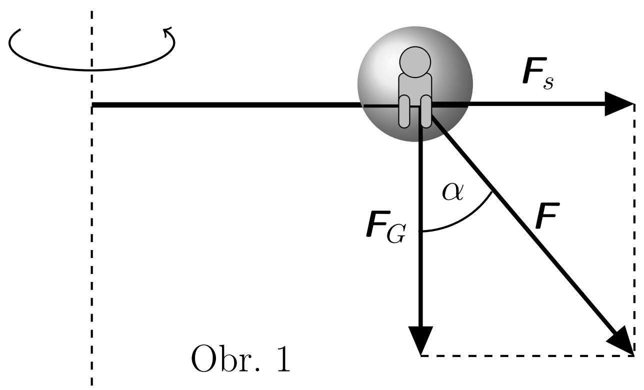
Dosazením vztahů (1) a (3) dostaneme

$$s = \frac{t_1}{t_2 - t_1} d = 1\ 860\ \mathrm{m}.$$

**3 body**

**2.**a) Ve vztažné soustavě spojené s kolotočem je chlapec přitlačován k sedačce silou $\boldsymbol{F}$, která je složená z tíhové síly $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_s$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_s,\ \ \boldsymbol{F}_s \perp \boldsymbol{F}_G.$$




Obr. 1

Ze vztahu

$$\cos\alpha = \frac{F_G}{F}$$

plyne

$$k = \frac{F}{F_G} = \frac{1}{\cos\alpha} = 1{,}3.$$

**2 body**

b) Pro velikost setrvačné odstředivé síly platí vztahy

$$F_s = ma_d = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2}, \tag{1}$$

$$F_s = F_G \mathrm{tg}\alpha = mg\mathrm{tg}\alpha. \tag{2}$$

Z nich plyne

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g\mathrm{tg}\alpha}} = 4{,}2 \text{ s}.$$

**3 body**

c) Ze vztahů (1), (2) dále plyne

$$a_d = g\mathrm{tg}\alpha,$$

kde

$$a_d = \frac{\mathrm{v}^2}{r}.$$

Z rovnic dostaneme

$$v^2 = gr\mathrm{tg}\alpha. \tag{3}$$

Kinetická energie chlapce pak je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgr\mathrm{tg}\alpha = 640 \text{ J}.$$

**2 body**

d) Pro rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení platí

$$s = \frac{1}{2}at_1^2,\ v = at_1.$$

Vyloučením tečného zrychlení $a$ dostaneme

$$s = \frac{vt_1}{2}.$$

Opsaný úhel je

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{vt_1}{2r}.$$

Užitím vztahu (3) dostaneme

$$\varphi = \frac{t_1}{2}\sqrt{\frac{g\mathrm{tg}\alpha}{r}} = 14 \text{ rad} = 810\ ^\circ.$$

**3 body**

**3.** a) Ve směru nakloněné roviny působí složka tíhové síly každého tělesa a proti pohybu třecí síla, která vzniká pouze u kvádru.

Složka tíhové síly samotného kvádru má velikost

$$F_2 = m_2 g \sin\alpha = 0{,}91\ \mathrm{N},$$

složka tíhové síly soustavy kvádru s vozíkem má velikost

$$F_{12} = (m_1 + m_2)\, g \sin\alpha = 1{,}42\ \mathrm{N}.$$

Velikost třecí síly působící proti pohybu kvádru je

$$F_\mathrm{t} = f m_2 g \cos\alpha = 1{,}02\ \mathrm{N}.$$

Z důvodu $F_2 < F_t < F_{12}$ zůstane kvádr na nakloněné rovině v klidu, ale souprava kvádru s vozíkem se na nakloněné rovině neudrží a uvede se do rovnoměrně zrychleného pohybu.

**3 body**

b) Samotný kvádr se ještě udrží v klidu při splnění podmínky

$$m_2 g \sin\alpha_2 = f m_2 g \cos\alpha_2.$$

Z rovnice plyne

$$\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2} = \mathrm{tg}\alpha_2 = f \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 17^\circ.$$

Soustava kvádru s vozíkem se ještě udrží v klidu při splnění podmínky

$$(m_1 + m_2)\, g \sin\alpha_{12} = f m_2 g \cos\alpha_{12}.$$

Z rovnice plyne

$$\mathrm{tg}\alpha_{12} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} f \quad \Rightarrow \quad \alpha_{12} = 11^\circ.$$

**2 body**

c) Ve všech případech se tělesa budou pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem na stejné dráze $s$, ale s různou velikostí zrychlení. Z rovnic $s = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$ vyloučením času dostaneme $v = \sqrt{2as}$. Velikosti zrychlení vozíku, kvádru a soustavy jsou postupně

$$a_1 = \frac{m_1 g \sin\beta}{m_1} = g \sin\beta,$$

$$a_2 = \frac{m_2 g \sin\beta - f m_2 g \cos\beta}{m_2} = g\left(\sin\beta - f \cos\beta\right),$$

$$a_{12} = \frac{(m_1 + m_2)\, g \sin\beta - f m_2 g \cos\beta}{m_1 + m_2} = g\left(\sin\beta - f \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos\beta\right).$$

Velikosti rychlosti jsou postupně

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s} = \sqrt{2gs \sin\beta} = 3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$v_2 = \sqrt{2a_2 s} = \sqrt{2gs\left(\sin\beta - f\cos\beta\right)} = 2{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

$$v_{12} = \sqrt{2a_{12}s} = \sqrt{2gs\left(\sin\beta - f\frac{m_2}{m_1+m_2}\cos\beta\right)} = 2{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

**5 bodů**

**4.**a) Velikost tahové síly nesmí překročit velikost třecí síly mezi záběrovými koly a vozovkou, proto platí:

$$F_{\mathrm{tah}} = f\frac{mg}{2} = 4\ 800\ \mathrm{N}. \tag{1}$$

**2 body**

b) Platí

$$P = F_{\mathrm{tah}}v_1 = f\frac{mg}{2}v_1.$$

Ze vztahu plyne

$$v_1 = \frac{2P}{fmg} = 4{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \tag{2}$$

**2 body**

c) Dosazením $F_{\mathrm{tah}} = ma_1$ do vztahu (1) dostaneme

$$a_1 = \frac{fg}{2} = 3{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Ze vztahu $P = F_2v_2 = ma_2v_2$ plyne

$$a_2 = \frac{P}{mv_2} = 0{,}64\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

**4 body**

d) Z rovnice $P\Delta t = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ s použitím vztahu (2) plyne

$$\Delta t = \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2P} = \frac{m}{2P}\left[v_2^2 - \left(\frac{2P}{fmg}\right)^2\right] = 17\ \mathrm{s}.$$

**2 body**

**5.**a) Označme $m$ hmotnost skateboardu a $r$ poloměr čtvrtkružnice. Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgr = \frac{1}{2}mv_1^2$$

plyne

$$r = \frac{v_1^2}{2g}. \tag{1}$$

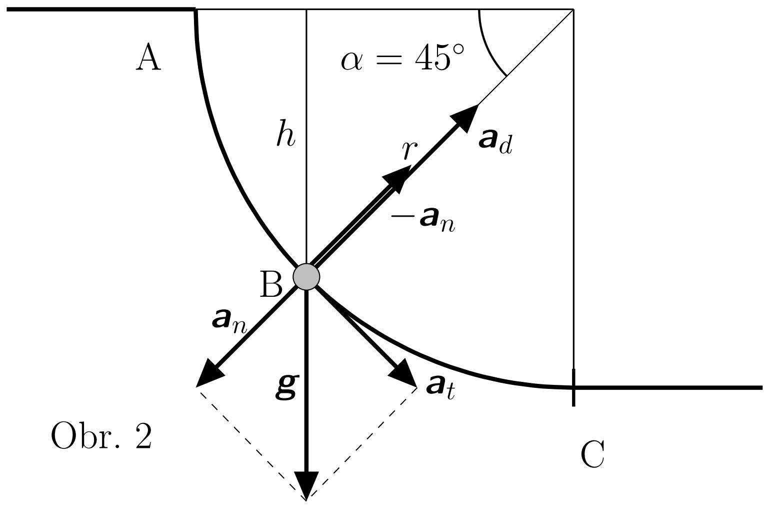
Čas rovnoměrného pohybu na dráze z bodu C do bodu D je

$$t = \frac{d-2r}{v_1},$$

kde po dosazení vztahu (1) dostaneme

$$t = \frac{d}{v_1} - \frac{v_1}{g} = 0{,}68\ \mathrm{s}.$$

**3 body**




Obr. 2

b) Označme $h$ výšku, z níž se skateboard dostane z bodu A do bodu B. Ze zákona zachování mechanické energie

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2,$$

kde $h = r\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}r$, plyne

$$v_2 = \sqrt{2gr\sin 45°} = \sqrt{\sqrt{2}gr}. \tag{2}$$

Použitím rovnice (1) nakonec dostaneme

$$v_2 = v_1\sqrt{\sin 45°} = v_1\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

**3 body**

c) Tečné zrychlení je určeno složkou tíhového zrychlení v tečném směru. Pro velikost tečného zrychlení tak platí

$$a_t = g\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}g = 6{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Velikost dostředivého zrychlení je dána vztahem

$$a_d = \frac{v_2^2}{r}.$$

Dosazením vztahu (2) dostaneme

$$a_d = 2g\sin 45° = \sqrt{2}g = 13{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

**4 body**

**6.**a) Označme ještě $V$ objem samotného ledu obklopujícího těleso v okamžiku vznášení. Podle Archimédova zákona platí:

$$m_\mathrm{t}g + \rho_\mathrm{v}V_\mathrm{v}g = \rho_\mathrm{v}\left(\frac{m_\mathrm{t}}{\rho_\mathrm{t}} + V\right)g,\ \text{kde } V = \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho}V_\mathrm{v}.$$

Dosazením a vyjádřením $\rho$ dostaneme vztah (1).

**2 body**

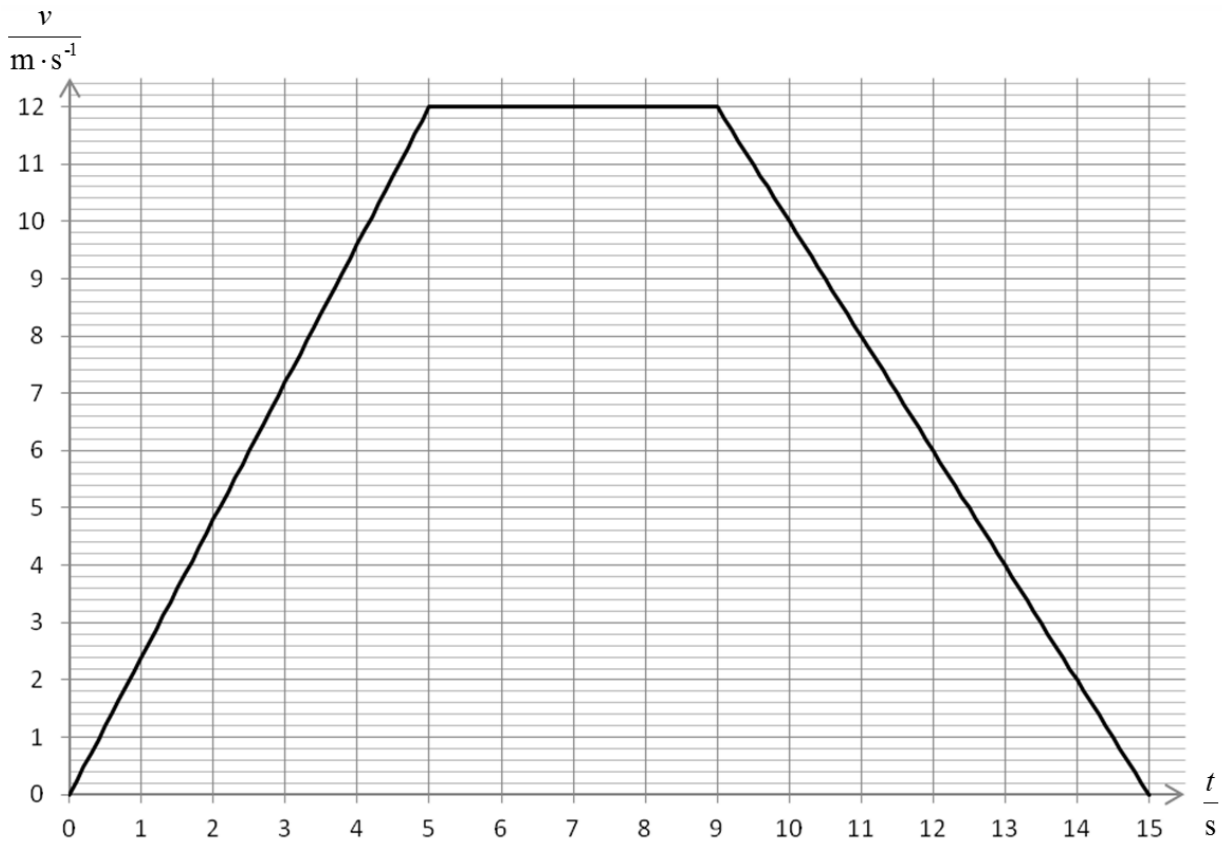
b) Výsledky měření uvádí tabulka:
Hustota vody $\rho_v = 1{,}000\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ (platí v rozmezí teplot 0 °C až 11 °C)

| | $\frac{m_t}{\mathrm{g}}$ | $\frac{\rho_t}{\mathrm{g\cdot cm^{-3}}}$ | $\frac{V_v}{\mathrm{cm^3}}$ | $\frac{\rho}{\mathrm{g\cdot cm^{-3}}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Ocelový váleček | 15,8 | 7,75 | 116 | 0,892 |
| Ocelová destička | 23,3 | 7,75 | 168 | 0,892 |
| Hliníkový váleček I | 19,4 | 2,70 | 113 | 0,902 |
| Hliníkový váleček II | 41,6 | 2,70 | 238 | 0,901 |
| Olověný úlomek | 20,9 | 11,34 | 172 | 0,900 |

Průměrná hustota ledu z pěti různých měření vychází $\bar{\rho} = 0{,}897\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, tabulková hodnota je $\rho_{\mathrm{tab}} = 0{,}917\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. Samotný rozptyl naměřených hodnot $\rho_{\max} - \rho_{\min} = 0{,}010\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ je menší než rozdíl mezi střední naměřenou a tabulkovou hodnotou $|\bar{\rho} - \rho_{tab}| = 0{,}020\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, což je 2,2 % z tabulkové hodnoty. Při pozorování ledu vyjmutého z plastové nádoby a při pozorování tání byly ve velkém počtu patrné drobné bublinky, které způsobí menší hodnotu hustoty použitého ledu, čímž lze menší naměřenou hodnotu částečně zdůvodnit.

**8 bodů**

**7.** a)




**2 body**

b) Velikosti zrychlení jsou

$$a_1 = \frac{12}{5}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 2{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\ a_2 = 0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\ a_3 = \frac{12}{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

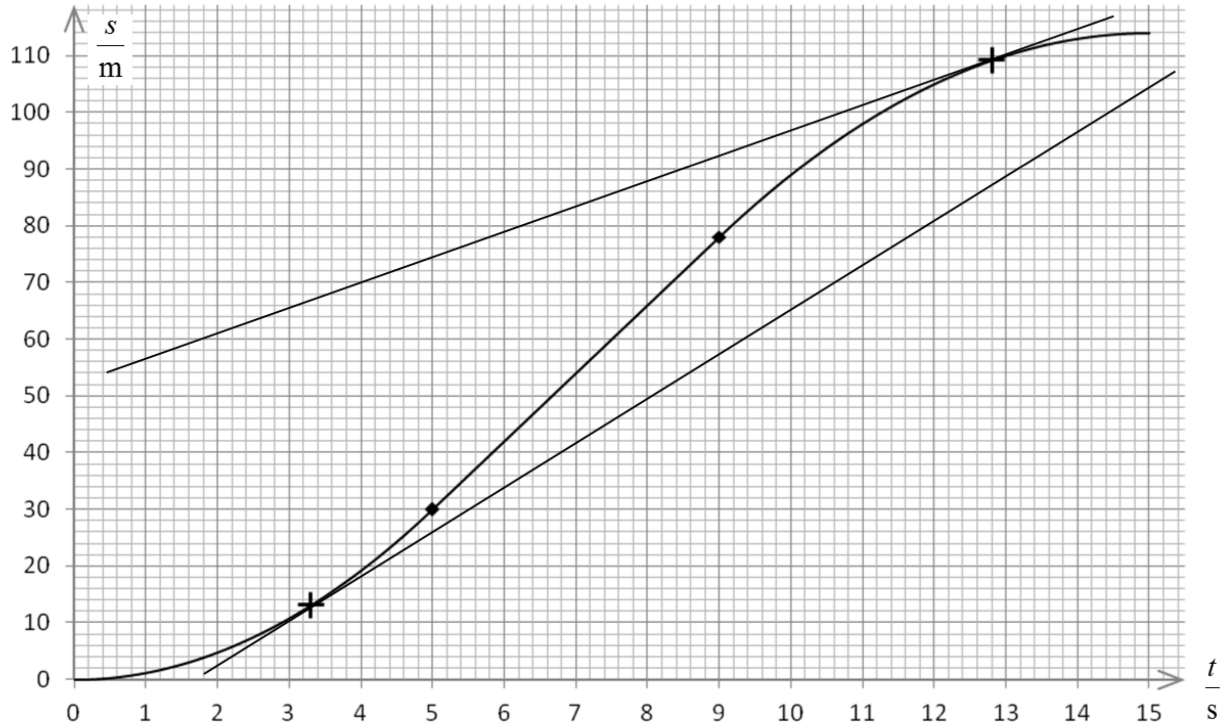
Ujetá dráha je

$$s_c = \left(\frac{1}{2}\cdot 2{,}4\cdot 5^2 + 12\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6^2\right)\ \text{m} = 114\ \text{m}.$$ **2 body**

c)

| | rovnoměrně zrychlený pohyb | | | | | | rovnoměrný pohyb | | | | rovnoměrně zpomalený pohyb | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{t}{\text{s}}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $\frac{s}{\text{m}}$ | 0 | 1,2 | 4,8 | 10,8 | 19,2 | 30 | 42 | 54 | 66 | 78 | 89 | 98 | 105 | 110 | 113 | 114 |

Na jednotlivých úsecích jsme použili vzorce:
$s = \frac{1}{2}a_1t^2$, kde $t$ je proměnný čas 0 až 5 s měřený od začátku pohybu,
$s = s_0 + v_0t$, kde $s_0 = 30$ m, $v_0 = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $t$ je proměnný čas 0 až 4 s měřený od začátku rovnoměrného pohybu,
$s = s_0 + v_0t - \frac{1}{2}a_3t^2$, kde $s_0 = 78$ m, $v_0 = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $t$ je proměnný čas 0 až 6 s měřený od začátku rovnoměrného pohybu.




**4 body**

d) Velikosti rychlostí určené z grafu pomocí sestrojených tečen:

$$v'_1 = \frac{100-4}{14{,}4-2{,}2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 7{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},\ v'_2 = \frac{114-62}{13{,}8-2{,}2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 4{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Velikosti rychlostí určené z časových rovnic pohybu:

$$v_1 = a_1t_1 = 7{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},\ v_2 = v_0 - a_3\,(t_2 - 9\ \text{s}) = 4{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

V daném provedení se hodnoty liší nejvýše o jednotku u 2. platné číslice.

**2 body**