Řešení úloh krajského kola 58. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů

1.a) Ze soustavy rovnic

$$\{\Delta t_1\} + \{\Delta t_2\} = 27$$
$$\{\Delta t_2\} - \{\Delta t_1\} = 3$$

plyne $\Delta t_1 = 12$ s, $\Delta t_2 = 15$ s. **1 bod**

b) Při jízdě do kopce je velikost zrychlení

$$a_1 = \frac{v_0}{\Delta t_1} = 0{,}75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Z rovnosti drah ujetých vagónem tam a zpět plyne

$$a_2 = \frac{\Delta t_1^2}{\Delta t_2^2} a_1 = 0{,}48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

c) Souřadnice polohy předního konce vagónu je při jízdě do kopce

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2,\ t \in \langle 0 \text{ s}; 12 \text{ s} \rangle ,$$

a při jízdě s kopce

$$x(t) = x(12 \text{ s}) - \frac{1}{2} a_2 (t - \Delta t_1)^2,\ t \in \langle 12 \text{ s}; 27 \text{ s} \rangle .$$

Vypočtené hodnoty sestavíme do tabulky:

$\frac{t}{\text{s}}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	27
$\frac{x}{\text{m}}$	0	16,5	30,0	40,5	48,0	52,5	54,0	53,0	50,2	45,4	38,6	30,0	19,4	7,0	0

2 body

Sestrojíme graf (části dvou různých parabol se společným vrcholem). **2 body**

d) Sestrojíme krajní grafy (přímky) pro rovnoměrný pohyb běžce, při němž dojde právě k jednomu setkání. **1 bod**

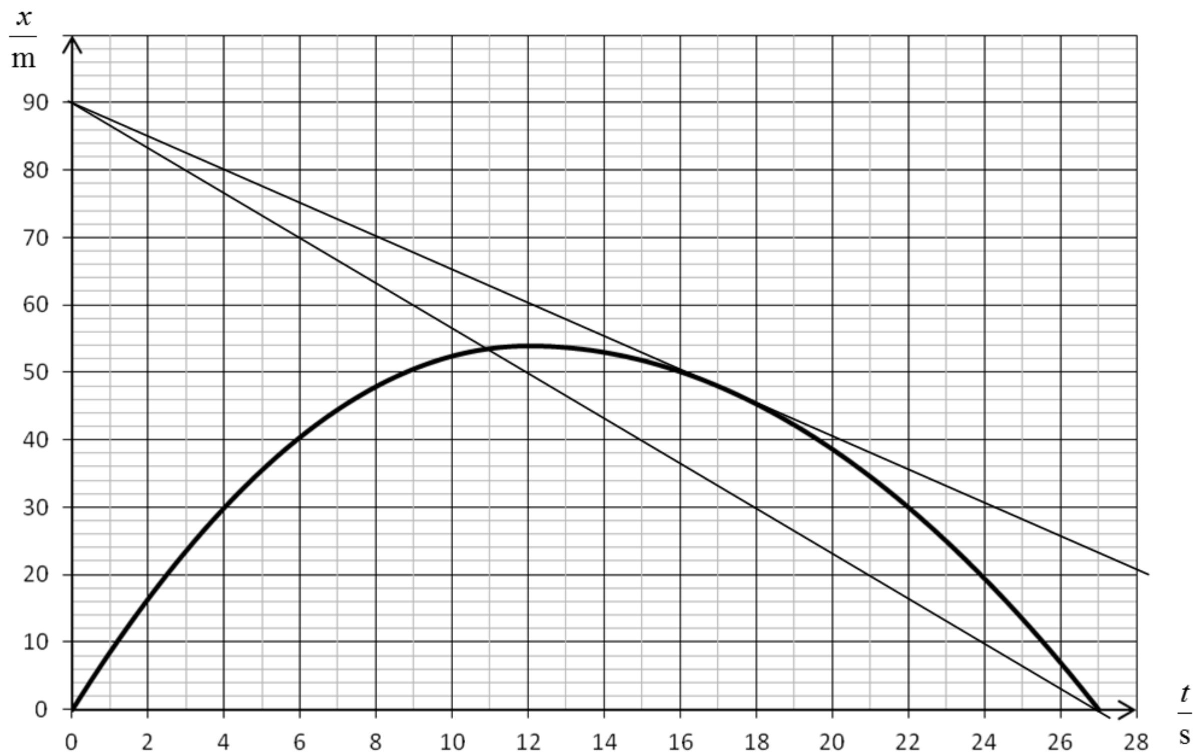
Sklon každé přímky určuje velikost rychlosti běžce. Velikost minimální možné rychlosti je určena sklonem tečné přímky:

$$v_{\min} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|21 - 90| \text{ m}}{(28 - 0)\text{s}} = 2{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Velikost maximální možné rychlosti je určena sklonem sečné přímky:

$$v_{\max} = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|0 - 90| \text{ m}}{(27 - 0)\text{s}} = 3{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Podmínce zadání vyhovují velikosti rychlosti běžce v rozmezí od $2{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ do $3{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. **2 body**



Poznámka: Přesný výpočet dává limitní hodnoty 2,47028... $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $3{,}\bar{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2.a) Označme $\Delta t = 1{,}5$ s dobu každého ze tří časových úseků, $v = 1{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ velikost okamžité rychlosti rovnoměrného pohybu výtahu a h výšku mezi sousedními patry neboli celkovou dráhu. Tu vypočteme jako celkový obsah plochy pod grafem, $h = 3{,}6$ m, přičemž na každý z krajních úseků připadá dráha $h/4$ a na prostřední úsek dráha $h/2$.

Kinetická energie výtahu na prostředním úseku se nemění a má hodnotu

$$E_k = \frac{1}{2}\left(2m_0 + m\right)v^2 = 490\ \mathrm{J}.$$

Vykonané práce dostaneme pomocí potenciální a kinetické energie:

$$W_1 = mg\frac{h}{4} + E_k = 1\,200\ \mathrm{J},$$
$$W_2 = mg\frac{h}{2} = 1\,400\ \mathrm{J},$$
$$W_3 = mg\frac{h}{4} - E_k = 220\ \mathrm{J}.$$

6 bodů

b) Průměrný výkon je

$$P = \frac{mgh}{3\Delta t} = 630\ \mathrm{W}.$$

Z grafu určíme velikost zrychlení na prvním úseku:

$$a = \frac{v}{\Delta t} = 0{,}80\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Okamžitý výkon dosáhne maximální hodnoty na konci urychlování, kdy je velikost okamžité rychlosti maximální:

$$P = [mg + (2m_0 + m)\,a]\,v = 1\ 600\ \mathrm{W}.$$

4 body

Alternativní řešení části a): Práce určíme pomocí síly a dráhy:

$$W_1 = [mg + (2m_0 + m)\,a]\,\frac{h}{4} = 1\ 200\ \mathrm{J},$$

$$W_2 = mg\frac{h}{2} = 1\ 400\ \mathrm{J},$$

$$W_3 = [mg - (2m_0 + m)\,a]\,\frac{h}{4} = 220\ \mathrm{J}.$$

3.a) Z rovnice $h_0 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$ plyne

$$v_0 = \frac{h_0}{t_1} - \frac{g t_1}{2} = 8{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

b) Doba letu t_0 je rovna době volného pádu z výšky h_0, tj.

$$h_0 = \frac{1}{2} g t_0^2 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Vzdálenost místa dopadu od paty věže pak je

$$d = v_0 t_0 = v_0 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 16\ \mathrm{m}.$$

3 body

c) Míček nejprve vystoupá nahoru za čas $t_3 = \frac{v_0}{g}$ a za stejný čas se vrátí zpět do místa vrhu, přičemž jeho rychlost bude mít stejnou velikost v_0, poté navazuje pohyb z části a) s dobou t_1. Platí:

$$t_2 = 2t_3 + t_1 = \frac{2v_0}{g} + t_1 = 3{,}0\ \mathrm{s}.$$

2 body

d) Bez ohledu na směr počáteční rychlosti má míček stejnou mechanickou energii. Ze ZZME

$$mgh_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_d^2$$

plyne

$$v_d = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = 21\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

4. a) Velikost setrvačné odstředivé síly v rotující soustavě je

$$F_s = mr\omega^2 = 4\pi^2 mrf^2 = 1\ 500\ \text{N}.$$

2 body

b) Přetížení je

$$k = \frac{\sqrt{F_G^2 + F_s^2}}{F_G} = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (4\pi^2 mrf^2)^2}}{mg} = \frac{\sqrt{g^2 + (4\pi^2 rf^2)^2}}{g} = 2{,}4.$$

3 body

c) Ze vztahu $k = \dfrac{\sqrt{F_G^2 + F_s^2}}{F_G}$ plyne

$$F_s = F_G\sqrt{k^2 - 1}.$$

Současně je

$$F_s = mr\frac{4\pi^2}{T_k^2}.$$

Z rovnic plyne

$$T_k = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{k^2 - 1}}.$$

2,5 bodu

Pro výpočet je vhodné částečně dosadit a ponechat pouze proměnnou k:

$$T_k = \frac{4{,}256}{\sqrt[4]{k^2 - 1}}\ \text{s}.$$

Číselně pak dostaneme

$$T_2 = 3{,}2\ \text{s},$$

$$T_3 = 2{,}5\ \text{s},$$

$$T_4 = 2{,}2\ \text{s},$$

$$T_5 = 1{,}9\ \text{s},$$

$$T_6 = 1{,}7\ \text{s}.$$

2,5 bodu