Řešení úloh krajského kola 58. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E

Autoři úloh: M. Bednařík (4), J. Thomas (1, 3) a I. Volf (2)

FO58E3–1: Na pohyblivých schodech

a) Pro hledané časy platí

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{43\,\mathrm{m}}{0{,}28\,\mathrm{m/s}} \doteq 153{,}57\,\mathrm{s} \doteq 150\,\mathrm{s}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{43\,\mathrm{m}}{0{,}55\,\mathrm{m/s}} \doteq 78{,}182\,\mathrm{s} \doteq 78\,\mathrm{s}.$$

2 body

b) Rychlost Tomáše na klidných schodech směrem nahoru vychází

$$v_\mathrm{h} = \frac{s}{t_\mathrm{h}} = \frac{43\,\mathrm{m}}{70\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}614\,29\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}61\,\mathrm{m/s}.$$

Půjde-li Tomáš směrem nahoru, pak doby jeho výstupů při rychlostech schodů v_1 a v_2 budou

$$t_3 = \frac{s}{v_1 + v_\mathrm{h}} = \frac{s}{v_1 + \dfrac{s}{t_\mathrm{h}}} = \frac{s t_\mathrm{h}}{v_1 t_\mathrm{h} + s} = \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{s}}{0{,}28\,\mathrm{m/s} \cdot 70\,\mathrm{s} + 43\,\mathrm{m}} \doteq 48{,}083\,\mathrm{s} \doteq 48\,\mathrm{s},$$

$$t_4 = \frac{s}{v_2 + v_\mathrm{h}} = \frac{s}{v_2 + \dfrac{s}{t_\mathrm{h}}} = \frac{s t_\mathrm{h}}{v_2 t_\mathrm{h} + s} = \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{s}}{0{,}55\,\mathrm{m/s} \cdot 70\,\mathrm{s} + 43\,\mathrm{m}} \doteq 36{,}933\,\mathrm{s} \doteq 37\,\mathrm{s}.$$

2 body

Rychlost Tomáše na klidných schodech směrem dolů vychází

$$v_\mathrm{d} = \frac{s}{t_\mathrm{d}} = \frac{43\,\mathrm{m}}{55\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}781\,82\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}78\,\mathrm{m/s}.$$

Půjde-li Tomáš směrem dolů, pak doby jeho sestupů při rychlostech schodů v_1 a v_2 budou

$$t_5 = \frac{s}{v_1 + v_\mathrm{d}} = \frac{s}{v_1 + \dfrac{s}{t_\mathrm{d}}} = \frac{s t_\mathrm{h}}{v_1 t_\mathrm{d} + s} = \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 55\,\mathrm{s}}{0{,}28\,\mathrm{m/s} \cdot 55\,\mathrm{s} + 43\,\mathrm{m}} \doteq 40{,}497\,\mathrm{s} \doteq 40\,\mathrm{s},$$

$$t_6 = \frac{s}{v_2 + v_\mathrm{d}} = \frac{s}{v_2 + \dfrac{s}{t_\mathrm{d}}} = \frac{s t_\mathrm{d}}{v_2 t_\mathrm{d} + s} = \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 55\,\mathrm{s}}{0{,}55\,\mathrm{m/s} \cdot 55\,\mathrm{s} + 43\,\mathrm{m}} \doteq 32{,}287\,\mathrm{s} \doteq 32\,\mathrm{s}.$$

2 body

c) Pro celkovou dobu chůze můžeme napsat

$$t_7 = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{\dfrac{s}{2}}{v_\mathrm{h} - v_1} = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{s}{2\left(\dfrac{s}{t_\mathrm{h}} - v_1\right)} = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{s t_\mathrm{h}}{2\,(s - v_1 t_\mathrm{h})}$$

$$= \frac{70\,\mathrm{s}}{2} + \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{s}}{2 \cdot (43\,\mathrm{m} - 0{,}28\,\mathrm{m/s} \cdot 70\,\mathrm{s})} \doteq 99{,}316\,\mathrm{s} \doteq 99\,\mathrm{s}.$$

2 body

d) Pro celkovou dobu chůze můžeme v tomto případě psát

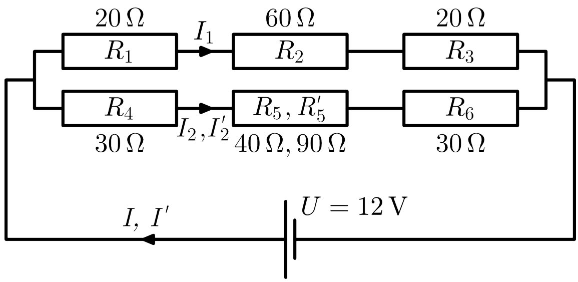
$$t_8 = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{\frac{s}{2}}{v_\mathrm{h} + v_1} = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{s}{2\left(\dfrac{s}{t_\mathrm{h}} + v_1\right)} = \frac{t_\mathrm{h}}{2} + \frac{st_\mathrm{h}}{2\,(s + v_1 t_\mathrm{h})}$$

$$= \frac{70\,\mathrm{s}}{2} + \frac{43\,\mathrm{m} \cdot 70\,\mathrm{s}}{2 \cdot (43\,\mathrm{m} + 0{,}28\,\mathrm{m/s} \cdot 70\,\mathrm{s})} \doteq 59{,}042\,\mathrm{s} \doteq 59\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

Poznámka: V částech b)–d) doporučujeme tolerovat drobné odchylky numerických výsledků na místě poslední platné cifry, pokud řešitelé dosazují zaokrouhlené hodnoty rychlostí v_h a v_d.

FO58E3–2: Elektrický obvod v laboratoři

a) Jednoduchý nákres obvodu je na obr. 1. **2 body**



Obr. 1: K úloze 4 – schéma obvodu

Poznámka: Doporučujeme tolerovat různé pořadí odporů ve větvích.

b) Odpory ve větvích vycházejí $R_\mathrm{v1} = R_1 + R_2 + R_3 = 100\,\Omega$, $R_\mathrm{v2} = R_4 + R_5 + R_6 = 100\,\Omega$, celkový odpor

$$R = \frac{R_\mathrm{v1} R_\mathrm{v2}}{R_\mathrm{v1} + R_\mathrm{v2}} = \frac{100\,\Omega \cdot 100\,\Omega}{100\,\Omega + 100\,\Omega} = 50\,\Omega.$$

Pro celkový proud dostáváme

$$I = \frac{U}{R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = 0{,}24\,\mathrm{A} = 240\,\mathrm{mA}.$$ **3 body**

c) Odpory obou větví jsou stejné, takže každou větví prochází proud $I_1 = I_2 = I/2 = 120\,\mathrm{mA}$. Pro napětí na rezistorech dostáváme v první větvi

$$U_1 = I_1 R_1 = 2{,}4\,\mathrm{V}, \quad U_2 = I_1 R_2 = 7{,}2\,\mathrm{V}, \quad U_3 = I_1 R_3 = 2{,}4\,\mathrm{V}$$

(celkem 12 V), ve druhé větvi

$$U_4 = I_2 R_4 = 3{,}6\,\mathrm{V}, \quad U_5 = I_2 R_5 = 4{,}8\,\mathrm{V}, \quad U_6 = I_2 R_6 = 3{,}6\,\mathrm{V}$$

(celkem opět 12 V). **3 body**

d) Druhá větev má teď odpor

$$R'_\mathrm{v2} = R_4 + R'_5 + R_6 = 150\,\Omega,$$

celkový odpor bude

$$R' = \frac{R_\mathrm{v1} R'_\mathrm{v2}}{R_\mathrm{v1} + R'_\mathrm{v2}} = \frac{100\,\Omega \cdot 150\,\Omega}{100\,\Omega + 150\,\Omega} = 60\,\Omega.$$

Pro celkový proud vychází

$$I' = \frac{U}{R'} = \frac{12\,\mathrm{V}}{60\,\Omega} = 0{,}2\,\mathrm{A} = 200\,\mathrm{mA}. \qquad \textbf{2 body}$$

FO58E3–3: Plovoucí pyramida

a) Celá pyramida obsahuje

$$n_\mathrm{k} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385\,\text{kostek}. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Tři spodní vrstvy obsahují $n_1 = 64+81+100 = 245$ kostek; vztlaková síla je tedy rovna tíze kapaliny (petroleje) o stejném objemu. Podle Archimédova zákona je tato síla rovna tíze celé pyramidy

$$n_1 V_1 \varrho_1 g = mg, \tag{1}$$

kde V_1 je objem jedné kostky, ϱ_1 je hustota petroleje a m hmotnost celé pyramidy. Spodní dvě vrstvy obsahují $n_2 = 181$ kostek, spodní vrstva $n_3 = 100$ kostek. Pak pro druhou a třetí kapalinu dostáváme

$$n_2 V_1 \varrho_2 g = mg \tag{2}$$

$$n_3 V_1 \varrho_3 g = mg \tag{3}$$

Porovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme

$$\varrho_2 = \frac{n_1}{n_2}\varrho_1 = \frac{245}{181} \cdot 800\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 1\,083\,\mathrm{kg/m^3};$$

ze vztahů (1) a (3) podobně vychází

$$\varrho_3 = \frac{n_1}{n_3}\varrho_1 = \frac{245}{100} \cdot 800\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,960\,\mathrm{kg/m^3}. \qquad \textbf{4 body}$$

c) Ve vodě se ponoří pod hladinu n kostek. Pak

$$n V_1 \varrho_\mathrm{v} g = mg. \tag{4}$$

Porovnáním vztahů (1) a (4) získáme

$$n\varrho_\mathrm{v} = 245\varrho_1 \qquad \Longrightarrow \qquad n = 245\frac{\varrho_1}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{245 \cdot 800\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 196.$$

Spodních sedm vrstev převrácené pyramidy obsahuje $1+4+9+16+25+36+49 = 140$ kostek, spodních osm vrstev $n_4 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204$ kostek, částečně ponořená je tedy osmá vrstva. Aby se ponořila úplně, musíme na horní plochu postavit ještě n' nových kostek a celková hmotnost pyramidy i s kostkami navíc bude m'. S pomocí (4) postupně získáme

$$n_4 V_1 \varrho_\mathrm{v} g = m'g, \qquad n_4 \cdot \frac{mg}{196} = m'g,$$

$$\frac{m'}{m} = \frac{n_\mathrm{k} + n'}{n_\mathrm{k}} = \frac{n_4}{n} \qquad n' = n_\mathrm{k}\frac{n_4}{n} - n_\mathrm{k} = 385 \cdot \frac{204}{196} - 385 \doteq 16.$$

Musíme proto na horní plochu postavit ještě 16 kostek. **4 body**

Poznámka: Úlohu lze řešit také vypočtením hustoty kostek ϱ_k; rovnici (1) pak lze přepsat ve tvaru

$$n_1 V_1 \varrho_1 g = n_\mathrm{k} V_1 \varrho_\mathrm{k} g; \qquad \Longrightarrow \qquad \varrho_\mathrm{k} = \frac{n_1}{n_\mathrm{k}}\varrho_1 = \frac{245}{385} \cdot 800\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 509\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Podobně získáme v části b)

$$\varrho_2 = \frac{n_\mathrm{k}}{n_2}\varrho_\mathrm{k} = \frac{385}{181}\cdot 509\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 1\,083\,\mathrm{kg/m^3},\ \varrho_3 = \frac{n_\mathrm{k}}{n_1}\varrho_\mathrm{k} = \frac{385}{100}\cdot 509\,\mathrm{kg/m^3} \doteq 1\,960\,\mathrm{kg/m^3};$$

a v části c)

$$n_4\varrho_\mathrm{v} = \varrho_\mathrm{k}\,(n_\mathrm{k} + n')\,, \quad n' = \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{k}}n_4 - n_\mathrm{k} = \frac{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}}{509\,\mathrm{kg/m^3}}\cdot 204 - 385 \doteq 16.$$

FO58E3–4: Na stavbě

a) Beran padá z výšky h, po dopadu na kůl se posune zároveň s kůlem ještě o délku s_1. Změna polohové energie beranu ΔE_{p1} je ekvivalentní práci W_1 vykonané při překonávání odporové síly F po dráze s_1, tedy práci $W_1 = Fs_1$. Z rovnosti

$$Fs_1 = mg\,(h + s_1)$$

určíme odporovou sílu

$$F = mg\,\frac{h + s_1}{s_1} = 500\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}\cdot\frac{3\,\mathrm{m} + 0{,}3\,\mathrm{m}}{0{,}3\,\mathrm{m}} = 53\,900\,\mathrm{N} \doteq 54\,\mathrm{kN}.$$ **3 body**

b) Při druhém nárazu dopadne beran na kůl z výšky $h + s_1$ a posune kůl do země o délku s_2. Pro změnu polohové energie a práci odporové síly nyní můžeme psát

$$\Delta E_{\mathrm{p2}} = mg\,(h + s_1 + s_2) = Fs_2,$$

odkud po dosazení za F z části a) získáváme

$$mg\,(h + s_1 + s_2) = mg\,\frac{h + s_1}{s_1}\,s_2,$$

$$s_2 = s_1\frac{(h + s_1)}{h} = 0{,}3\,\mathrm{m}\cdot\frac{3\,\mathrm{m} + 0{,}3\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m}} = 0{,}33\,\mathrm{m} = 33\,\mathrm{cm}.$$ **3 body**

c) Po druhém nárazu vnikne do země část kůlu o celkové délce $s_1 + s_2 = 0{,}63\,\mathrm{m}$. Podobně jako v části b) určíme vzdálenost s_3, o kterou kůl pronikne dále do země po třetím nárazu; postupně odvodíme

$$mg\,(h + s_1 + s_2 + s_3) = Fs_3,$$

$$mg\,(h + s_1 + s_2 + s_3) = mg\,\frac{h + s_1}{s_1}\,s_3,$$

$$s_3 = s_1\frac{(h + s_1 + s_2)}{h} = 0{,}3\,\mathrm{m}\cdot\frac{3\,\mathrm{m} + 0{,}3\,\mathrm{m} + 0{,}33\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m}} = 0{,}363\,\mathrm{m} \doteq 36\,\mathrm{cm}.$$

Po sečtení vidíme, že

$$s_1 + s_2 + s_3 \doteq 30\,\mathrm{cm} + 33\,\mathrm{cm} + 36\,\mathrm{cm} = 99\,\mathrm{cm},$$

což téměř odpovídá polovině délky kůlu $d/2 = 2\,\mathrm{m}/2 = 1\,\mathrm{m}$. Přibližně polovina kůlu bude zatlučena po třetím nárazu. **4 body**

Poznámka: Pokud řešitelé zdůvodní, že 99 cm po třetím nárazu je méně než polovina kůlu $d/2 = 1\,\mathrm{m}$ a je tedy zapotřebí ještě jednoho nárazu beranu, doporučujeme uznat i takový závěr za správný.

Úlohy připravila komise pro výběr úloh při ÚKFO České republiky ve složení Martin Kapoun, Jindřich Pulíček a Lukáš Richterek ve spolupráci s autorem úloh Janem Thomasem.