Řešení úloh školního kola 58. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E a F

Autoři úloh: M. Bednařík (1, 12, 14), M. Chytilová (3), J. Jírů (2, 4–8), J. Tesař (13), J. Thomas (9–11), Ľ. Konrád (15)

FO58EF1–1: Jízda vlakem

a) Za dobu t_1 ujel osobní vlak dráhu $s_1 = v_1 t_1 = nl$, odtud pro rychlost vlaku vychází

$$v_1 = \frac{nl}{t_1} = \frac{18 \cdot 50\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = 15\,\mathrm{m/s} = 54\,\mathrm{km/h}.$$ **3 body**

b) V protisměru jízdy osobního vlaku míjí rychlík okno pozorovatele rychlostí $v_1 + v_2$ a za dobu t_2 ujede vzdálenost $(v_1 + v_2)\,t_2 = kd$. Pro rychlost v_2 pak vychází

$$v_2 = \frac{kd}{t_2} - v_1 = \frac{8 \cdot 25\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}} - 15\,\mathrm{m/s} = 25\,\mathrm{m/s} = 90\,\mathrm{km/h}.$$ **4 body**

c) Ve směru jízdy osobního vlaku míjí rychlík okno pozorovatele rychlostí $v_2 - v_1$ a za dobu t_3 ujede vzdálenost $(v_2 - v_1)\,t_3 = kd$. Pro čas t_3 pak vychází

$$t_3 = \frac{kd}{v_2 - v_1} = \frac{8 \cdot 25\,\mathrm{m}}{25\,\mathrm{m/s} - 15\,\mathrm{m/s}} = 20\,\mathrm{s}.$$ **3 body**

FO58EF1–2: Šíření signálu

a) Vzdálenosti jsou uvedeny v astronomických jednotkách (au), $1\,\mathrm{au} = 149\,600\,000\,\mathrm{km}$, rychlost světla ve vakuu je $300\,000\,\mathrm{km/s}$. Dobu letu získáme vydělením vzdálenosti rychlostí světla.

Planeta	Střední vzdálenost od Slunce (au)	Doba letu světla
Merkur	0,387	3 min 13 s
Venuše	0,723	6 min 1 s
Země	1,00	8 min 19 s
Mars	1,52	12 min 38s
Jupiter	5,20	43 min 13 s
Saturn	9,54	1 h 19 min
Uran	19,2	2 h 40 min
Neptun	30,1	4 h 10 min

4 body

b) Střední vzdálenost Země Měsíc je $384\,000\,\mathrm{km}$, doba letu světla je $1{,}28\,\mathrm{s}$. **2 body**

c) Nejmenší vzájemná vzdálenost planet Země a Mars odpovídá situaci, kdy jsou obě planety na stejné straně od Slunce, a vychází

$$d_{\min} = 1{,}52\,\mathrm{au} - 1\,\mathrm{au} = 0{,}52\,\mathrm{au} = 77\,792\,000\,\mathrm{km} \doteq 77\,800\,000\,\mathrm{km};$$

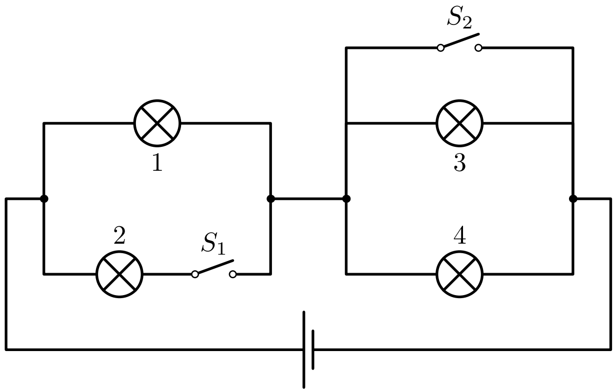
největší pak odpovídá situaci, kdy jsou planety na opačných stranách od Slunce

$$d_{\max} = 1{,}52\,\mathrm{au} + 1\,\mathrm{au} = 2{,}52\,\mathrm{au} = 376\,992\,000\,\mathrm{km} \doteq 377\,000\,000\,\mathrm{km};$$

Odpovídající doby letu světla jsou $t_{\min} \doteq 259{,}31\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{min}\ 19\,\mathrm{s}$ a $t_{\max} \doteq 1\,256{,}6\,\mathrm{s} = 20\,\mathrm{min}\ 57\,\mathrm{s}$. **4 body**

FO58EF1–3: Čtyři žárovky

Zapojení je na obr. 1 **6 bodů**



Obr. 1: Zapojení žárovek v úloze 3

a) S_1 vypnut, S_2 zapnut: svítí žárovka 1. **1 bod**

b) S_1 zapnut, S_2 zapnut: svítí žárovky 1 a 2. **1 bod**

c) S_1 vypnut, S_2 vypnut: svítí žárovky 1, 3 a 4. **1 bod**

d) S_1 zapnut, S_2 vypnut: svítí všechny žárovky. **1 bod**

FO58EF1–4: Lyžařský vlek

Označme $l = 540\,\mathrm{m}$ délku vleku, $h = 124\,\mathrm{m}$ výškový rozdíl, $t_1 = 3\,\mathrm{min}\ 30\,\mathrm{s} = 210\,\mathrm{s}$ dobu jízdy lyžaře, $l_1 = 10\,\mathrm{m}$ vzdálenost mezi sousedními lyžaři, $m_1 = 70\,\mathrm{kg}$ hmotnost lyžaře.

a) Práce nutná k vytažení jednoho lyžaře je

$$W_1 = m_1 g h = 70\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 124\,\mathrm{m} = 86{,}8\,\mathrm{kJ} \doteq 87\,\mathrm{kJ}.$$ **2 body**

b) Na plně obsazeném vleku se veze

$$N_0 = \frac{l}{l_1} = \frac{540\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m}} = 54\,\text{lyžařů}.$$ **1 bod**

c) Lano je napínáno silou

$$F = N_0 m_1 g \frac{h}{l} = 54 \cdot 70\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot \frac{124\,\mathrm{m}}{540\,\mathrm{m}} = 8{,}68\,\mathrm{kN} \doteq 8{,}7\,\mathrm{kN}.$$ **2 body**

d) Lyžaři jsou taženi rychlostí $v = l/t_1 = 540\,\mathrm{m}/210\,\mathrm{s} \doteq 2{,}57\,\mathrm{m/s}$, motor vleku má výkon

$$P = Fv = 8\,680\,\mathrm{N} \cdot 2{,}57\,\mathrm{m/s} \doteq 22\,\mathrm{kW}.$$ **2 body**

Jiná možnost výpočtu výkonu:

$$P = \frac{Fl}{t_1} = \frac{8\,680\,\mathrm{N} \cdot 540\,\mathrm{m}}{210\,\mathrm{s}} \doteq 22\,\mathrm{kW}.$$

e) Mezi dvěma nástupy uplyne čas

$$t' = \frac{l_1}{v} = \frac{10\,\mathrm{m}}{2{,}57\,\mathrm{m/s}} \doteq 3{,}89\,\mathrm{s},$$

za 1 h tak nasedne nebo vysedne

$$N = \frac{1\,\mathrm{h}}{t'} \doteq 925\,\text{lyžařů}. \qquad \textbf{2 body}$$

f) Celá výprava nasedne na vlek za čas $N't'$, poslední lyžař se poveze po dobu t_1. Výtah musí být zapnutý po dobu

$$\Delta t = N't' + t_1 = 46 \cdot 3{,}89\,\mathrm{s} + 210\,\mathrm{s} \doteq 389\,\mathrm{s} \doteq 6{,}5\,\mathrm{min}. \qquad \textbf{1 bod}$$

FO58EF1–5: Dva rezistory

a) Pro rezistor A platí

$$P_\mathrm{A} = \frac{U^2}{R_\mathrm{A}}; \qquad \Longrightarrow \qquad R_\mathrm{A} = \frac{U^2}{P_\mathrm{A}} = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{8\,\mathrm{W}} = 18\,\Omega.$$

Obdobně odpor rezistoru B je

$$R_\mathrm{B} = \frac{U^2}{P_\mathrm{B}} = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{32\,\mathrm{W}} = 4{,}5\,\Omega. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Příkon každého z rezistorů zůstane stejný, neboť při paralelním spojení je každý napájen stejným napětím jako při samostatném připojení ke zdroji. **1 bod**

c) Odpor paralelně spojených rezistorů je

$$R_\mathrm{p} = \frac{R_\mathrm{A} R_\mathrm{B}}{R_\mathrm{A} + R_\mathrm{B}} = \frac{18\,\Omega \cdot 4{,}5\,\Omega}{18\,\Omega + 4{,}5\,\Omega} = 3{,}6\,\Omega.$$

Proud tekoucí zdrojem pak je

$$I_\mathrm{p} = \frac{U}{R_\mathrm{p}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{3{,}6\,\Omega} \doteq 3{,}3\,\mathrm{A}. \qquad \textbf{2 body}$$

d) Proud v obvodu při sériovém zapojení je

$$I_\mathrm{s} = \frac{U}{R_\mathrm{A} + R_\mathrm{B}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{18\,\Omega + 4{,}5\,\Omega} \doteq 0{,}53\,\mathrm{A}.$$

Příkon rezistoru A při sériovém zapojení potom vychází

$$P'_\mathrm{A} = R_\mathrm{A} I_\mathrm{s}^2 = 18\,\Omega \cdot (0{,}53\,\mathrm{A})^2 \doteq 5{,}1\,\mathrm{W},$$

příkon rezistoru B při sériovém zapojení

$$P'_\mathrm{B} = R_\mathrm{B} I_\mathrm{s}^2 = 4{,}5\,\Omega \cdot (0{,}53\,\mathrm{A})^2 \doteq 1{,}3\,\mathrm{W}. \qquad \textbf{3 body}$$

e) Odpor s rostoucím obsahem průřezu klesá. Rezistor B má podle části a) menší odpor a tudíž větší obsah průřezu a větší průměr. Obecně obsah kruhu roste s druhou mocninou jeho průměru ($S = \pi d^2/4$), kruh s dvojnásobným průměrem má proto čtyřnásobný obsah. V našem případě je odpor rezistoru B právě čtyřikrát menší než odpor rezistoru A, tedy rezistor B má právě čtyřikrát větší obsah průřezu, a tím dvakrát větší průměr než rezistor A. **2 body**

FO58EF1–6: Rumpál u studny

a) Celková hmotnost nádoby $m_0 = 6{,}0\,\mathrm{kg}$ s vodou o objemu $V_1 = 30\,\mathrm{l} = 0{,}03\,\mathrm{m^3}$ je

$$m = m_0 + \varrho V_1 = 6{,}0\,\mathrm{kg} + 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}03\,\mathrm{m^3} = 36\,\mathrm{kg}.$$

Toto břemeno vytahujeme nahoru silou rovnou minimálně tíhové síle

$$F_G = mg = 36\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 360\,\mathrm{N}.$$

Vyjdeme z rovnosti momentů sil (rumpál je kolo na hřídeli), proto na kliku působíme silou F, pro niž platí

$$FR = rF_G,$$

$$F = \frac{r}{R}F_G = \frac{d/2}{l}F_G = \frac{d}{2l}F_G = \frac{16\,\mathrm{cm}}{2 \cdot 40\,\mathrm{cm}} 360\,\mathrm{N} = 72\,\mathrm{N}.$$ **2 body**

b) Při jednom otočení se břemeno vytáhne do výšky $h_1 = \pi d = \pi \cdot 0{,}16\,\mathrm{m} \doteq 0{,}50\,\mathrm{m}$. Počet otáček pak je

$$n = \frac{h}{h_1} = \frac{h}{\pi d} = \frac{19\,\mathrm{m}}{\pi \cdot 0{,}16\,\mathrm{m}} \doteq 38.$$ **2 body**

c) Při jednom vytažení plné nádoby vykonáme práci

$$W_1 = F_G h = 360\,\mathrm{N} \cdot 19\,\mathrm{m} = 6\,840\,\mathrm{J}.$$

Doba vytahování nádoby je

$$t = nt_1 = 38 \cdot 1{,}5\,\mathrm{s} = 57\,\mathrm{s}.$$

Výkon člověka u rumpálu je

$$P = \frac{W_1}{t} = \frac{6\,840\,\mathrm{J}}{57\,\mathrm{s}} = 120\,\mathrm{W}.$$ **3 body**

d) Rychlost pohybu nádoby získáme z obvodu válce a doby jedné otočky nádoby

$$v = \frac{\pi d}{t_1} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}16\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}33\,\mathrm{m/s}.$$ **1 bod**

Poznámka: Rychlost pohybu nádoby lze získat i z hodnot vypočítaných v předchozích částech

$$v = \frac{h}{t} = \frac{19\,\mathrm{m}}{57\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}33\,\mathrm{m/s}.$$

e) K vytažení objemu $V = 200\,\mathrm{l} = 0{,}2\,\mathrm{m^3}$ vody musíme provést celkem $V/V_1 = 200/30 = 7$ vytažení. Práci lze rozdělit na práci potřebnou k vytažení samotné vody a práci nutnou k sedminásobnému vytažení prázdné nádoby

$$W = \varrho V gh + 7m_0 gh = (\varrho V + 7m_0)\,gh =$$
$$= \left(1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m^3} + 7 \cdot 6\,\mathrm{kg}\right) \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 19\,\mathrm{m} = 45\,980\,\mathrm{J} \doteq 46\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

FO58EF1–7: Automobil v mlze

a) Za obvyklých podmínek se automobil pohybuje rychlostí

$$v = \frac{s}{t} = \frac{28\,\mathrm{km}}{\frac{35}{60}\,\mathrm{h}} = 48\,\mathrm{km/h}.$$

V mlze dojel na chatu za čas

$$t' = \frac{s}{v'} = \frac{28\,\mathrm{km}}{30\,\mathrm{km/h}} = 0{,}933\,3\,\mathrm{h} = 56\,\mathrm{min}.$$

Dorazil s časovým zpožděním $\Delta t = 56\,\mathrm{min} - 35\,\mathrm{min} = 21\,\mathrm{min}$. **3 body**

b) V mlze ujel za čas $t_1 = 10\,\mathrm{min}$ vzdálenost

$$s_1 = v't_1 = 30\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{10}{60}\,\mathrm{h} = 5\,\mathrm{km}.$$

Druhý úsek délky $s_2 = s - s_1 = 28\,\mathrm{km} - 5\,\mathrm{km} = 23\,\mathrm{km}$ za čas

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{23\,\mathrm{km}}{48\,\mathrm{km/h}} = 0{,}479\,\mathrm{h} \doteq 29\,\mathrm{min}.$$

Doba jízdy pak je $t_\mathrm{c} = t_1 + t_2 = 10\,\mathrm{min} + 29\,\mathrm{min} = 39\,\mathrm{min}$ a automobil přijede na chatu se zpožděním asi $\Delta t' = 39\,\mathrm{min} - 35\,\mathrm{min} = 4\,\mathrm{min}$. Jeho průměrná rychlost byla

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t_\mathrm{c}} = \frac{28\,\mathrm{km}}{\frac{39}{60}\,\mathrm{h}} \doteq 43\,\mathrm{km/h}.$$ **4 body**

c) Po ujetí úseku délky $s_1 = 5\,\mathrm{km}$ v mlze za čas $t_1 = 10\,\mathrm{min}$ by musel zbývající trasu délky $s_2 = 23\,\mathrm{km}$ ujet za čas $t_2' = t - t_1 = 35\,\mathrm{min} - 10\,\mathrm{min} = 25\,\mathrm{min}$. Jeho rychlost po rozplynutí mlhy by proto musela být

$$v_2' = \frac{s_2}{t_2'} = \frac{23\,\mathrm{km}}{\frac{25}{60}\,\mathrm{h}} \doteq 55\,\mathrm{km/h}.$$ **3 body**

FO58EF1–8: Vlak jede do kopce

a) Vlak se pohyboval rychlostí

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2{,}85\,\mathrm{km}}{3\,\mathrm{min}} = \frac{2{,}85\,\mathrm{km}}{\frac{1}{20}\,\mathrm{h}} = 57\,\mathrm{km/h}.$$ **1 bod**

b) Hmotnost celého vlaku je $m = 70\,\mathrm{t} + 3 \cdot 40\,\mathrm{t} = 190\,\mathrm{t} = 190\,000\,\mathrm{kg}$. Vlak vyjel do výšky $h = 0{,}016 \cdot 2\,850\,\mathrm{m} = 45{,}6\,\mathrm{m}$ a lokomotiva vykonala užitečnou práci odpovídající zvýšení polohové energie

$$W = \Delta E_\mathrm{p} = mgh = 190\,000\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 45{,}6\,\mathrm{m} = 86\,640\,000\,\mathrm{J} \doteq 86{,}6\,\mathrm{MJ}$$

2 body

c) Motor pracoval po dobu $t = 3\,\mathrm{min} = 180\,\mathrm{s}$ s výkonem $P = 620\,\mathrm{kW} = 620\,000\,\mathrm{W}$, vykonal tak celkovou práci $W_\mathrm{c} = Pt = 620\,000\,\mathrm{W} \cdot 180\,\mathrm{s} = 111\,600\,000\,\mathrm{J} \doteq 112\,\mathrm{MJ}$. Část této práce se jako užitečná práce využila na zvýšení polohové energie vlaku. Účinnost je

$$\eta = \frac{W}{W_\mathrm{c}} = \frac{86{,}6\,\mathrm{MJ}}{112\,\mathrm{MJ}} \doteq 77\,\%.$$ **4 body**

d) Hmotnost vlaku je nyní $m' = 70\,\mathrm{t} + 6 \cdot 40\,\mathrm{t} = 310\,\mathrm{t} = 310\,000\,\mathrm{kg}$. Vlak získal polohovou energii

$$\Delta E_\mathrm{p}' = m'gh = 310\,000\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 45{,}6\,\mathrm{m} = 141\,360\,000\,\mathrm{J} = 141\,\mathrm{MJ}.$$

Užitečný výkon je

$$P' = \eta P = 0{,}77 \cdot 620\,\mathrm{kW} \doteq 477\,\mathrm{kW}.$$

Doba jízdy je tentokrát

$$t' = \frac{E'_\mathrm{p}}{P'} = \frac{141\,000\,000\,\mathrm{J}}{477\,000\,\mathrm{W}} \doteq 295{,}6\,\mathrm{s} \doteq 4\,\mathrm{min}\,56\,\mathrm{s}.$$ **4 body**

FO58EF1–9: Mazaný prodavač

a) Prodavač dává zboží na delší rameno vah, abychom ho museli vyvažovat větším závažím. **2 body**

b) Označme hmotnost zboží m, delší rameno vah a, kratší b. Prodavač dá zboží na rameno a a na rameni b jej vyváží závažím m_1. Pokud můžeme sami zboží převážit, přemístíme zboží na druhou misku (s ramenem b) a na rameni a ho vyvážíme závažím o hmotnosti m_2. Z podmínek rovnováhy na páce platí v prvním případě $ma = m_1 b$ a ve druhém $m_2 a = mb$. Podělením rovnic získáme

$$\frac{m}{m_2} = \frac{m_1}{m}; \qquad \Longrightarrow \qquad m^2 = m_1 m_2, \qquad m = \sqrt{m_1 m_2}.$$

Skutečná hmotnost zboží je tak odmocninou ze součinu hmotností m_1 a m_2. **4 body**

c) Ke zboží na misce přidáme závaží m_3 a na druhé misce vyvážíme váhy závažím o hmotnosti m_4. Platí

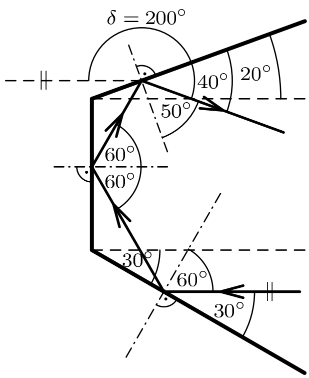
$$ma = m_1 b, \qquad (m + m_3)\,a = m_4 b.$$

Dělením rovnic a úpravou vychází

$$\frac{m}{m + m_3} = \frac{m_1}{m_4}, \qquad mm_4 = mm_1 + m_3 m_1, \qquad m = \frac{m_1 m_3}{m_4 - m_1}.$$ **4 body**

FO58EF1–10: Tři zrcadla

a) Chod paprsků a některé úhly jsou znázorněny na obr. 2. Paprsek odražený na



Obr. 2: Chod paprsku mezi třemi zrcadly v úloze 10

prvním zrcadle s ním svírá úhel $90° - \gamma = 90° - 60° = 30°$. S druhým zrcadlem

bude svírat úhel $180° - 90° - 30° - 30° = 30°$. Úhel dopadu na druhé zrcadlo (měřený od kolmice dopadu) je pak doplněk do pravého úhlu, tj. $60°$. **2 body**
Paprsek odražený na druhém zrcadle bude se třetím zrcadlem svírat úhel $180° - 90° - 20° - 30° = 40°$. Úhel dopadu na třetí zrcadlo (měřený od kolmice dopadu) pak bude opět doplněk do pravého úhlu, tj. $50°$. **2 body**

b) Od původního směru se paprsek odchýlí o úhel $\delta = 2 \times 30° + 2 \times 30° + 2 \times 40° = 200°$. **2 body**

c) Aby se paprsek odražený na třetím zrcadle vracel v původním směru (a úhel $\delta = 180°$), stačí zvětšit úhel α o $10°$ na hodnotu $\alpha = 30°$. Úhel, pod kterým dopadne paprsek na třetí zrcadlo, bude $180° - 90° - 30° - 30° = 30°$. Odraz paprsků na prvním a třetím zrcadle pak bude symetrický a od původního směru se paprsek odchýlí o úhel $\delta = 2 \times 30° + 2 \times 30° + 2 \times 30° = 180°$. **2 body**

d) Abychom dosáhli stejného efektu změnou úhlu β, musíme tento úhel zmenšit o $10°$ na hodnotu $\beta = 20°$. Tím se úhel dopadu na první zrcadlo zvětší na $70°$ a úhel, který svírá paprsek s prvním zrcadlem bude $20°$. Paprsek dopadající na druhé zrcadlo bude s tímto zrcadlem svírat úhel $180° - 90° - 20° - 20° = 50°$ a paprsek dopadající na třetí zrcadlo s ním bude svírat úhel $180° - 90° - 20° - 50° = 20°$. Od původního směru se pak paprsek odkloní o $\delta = 2 \times 20° + 2 \times 50° + 2 \times 20° = 180°$.
2 body

Poznámka: V případech c) a d) řešitelé mohou použít i zdůvodnění, že ke změně směru paprsku o $\delta = 180°$ stačí, aby byly úhly α a β stejné; v obou případech je tedy nutné je změnit o $10°$.

FO58EF1–11: Větrná elektrárna

a) Poklesne-li rychlost větru na polovinu, tj. na $v_1 = v/2$, bude výkon elektrárny přibližně

$$P_1 = kv_1^3 = \frac{kv^3}{8} = \frac{P}{8} = \frac{3\,000\,\mathrm{kW}}{8} = 375\,\mathrm{kW}. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Při výkonu, který odpovídá $20\,\%$ plného výkonu, platí

$$P_2 = 0{,}20P = kv_2^3, \qquad \Longrightarrow \qquad v_2 = \sqrt[3]{\frac{0{,}20 \cdot 3\,000\,000\,\mathrm{W}}{1\,750\,\mathrm{W/(m/s)^3}}} \doteq 7\,\mathrm{m/s}. \qquad \textbf{3 body}$$

c) Koncové body rotoru elektrárny se pohybují po kružnici a za minutu vykonají 13 otáček při délce ramen $r = 56\,\mathrm{m}$; pohybují se tedy rychlostí

$$v_\mathrm{r} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi r}{60\,\mathrm{s}/13} = \frac{13 \cdot 2\pi \cdot 56\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} \doteq 76{,}2\,\mathrm{m/s}. \qquad \textbf{3 body}$$

d) Počet otáček je úměrný rychlosti, takže pro počet otáček n_1 a n_2 platí

$$v_1 = \frac{2\pi r}{T_1} = n_1 \frac{2\pi r}{60\,\mathrm{s}}, \qquad v_2 = \frac{2\pi r}{T_2} = n_2 \frac{2\pi r}{60\,\mathrm{s}}, \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Vychází tak

$$n_2 = n_1 \frac{v_2}{v_1} = 13 \cdot \frac{340\,\mathrm{m/s}}{76{,}2\,\mathrm{m/s}} = 58\,\text{otáček za minutu}. \qquad \textbf{2 body}$$

FO58EF1–12: Vodní lázeň

a) Je-li V_1 objem teplé vody, V_2 objem studené vody a V objem celé lázně, platí $V_2 = V - V_1$. Zapíšeme kalorimetrickou rovnici

$$V_1 \varrho c\,(t_1 - t) = (V - V_1)\,\varrho c\,(t - t_2)$$

a z ní vyjádříme objem V_1

$$V_1 = V\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = 70\,\mathrm{l}\,\frac{33\,°\mathrm{C} - 13\,°\mathrm{C}}{63\,°\mathrm{C} - 13\,°\mathrm{C}} = 28\,\mathrm{l} = 0{,}028\,\mathrm{m}^3.$$

Objem studené vody pak vychází $V_2 = V - V_1 = 70\,\mathrm{l} - 28\,\mathrm{l} = 42\,\mathrm{l} = 0{,}042\,\mathrm{m}^3$.

4 body

b) Zapíšeme opět kalorimetrickou rovnici

$$V \varrho c\,(t - t_3) = V_3 \varrho c\,(t_1 - t)\,,$$

odkud dostáváme

$$V_3 = V\frac{t - t_3}{t_1 - t} = 70\,\mathrm{l}\,\frac{33\,°\mathrm{C} - 27\,°\mathrm{C}}{63\,°\mathrm{C} - 33\,°\mathrm{C}} = 14\,\mathrm{l}.$$

2 body

c) Jestliže započítáme i teplo potřebné na ohřátí vany o hmotnosti $m_\mathrm{v} = 50\,\mathrm{kg}$, bude mít kalorimetrická rovnice při hmotnostech $m_1 = V_1\varrho = 0{,}028\,\mathrm{m}^3 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 28\,\mathrm{kg}$ teplé a $m_2 = V_2\varrho = 0{,}042\,\mathrm{m}^3 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 42\,\mathrm{kg}$ studené vody tvar

$$m_1 c\,(t_1 - t') = m_2 c\,(t' - t_2) + m_\mathrm{v} c_\mathrm{o}\,(t' - t_4)\,,$$

odkud postupně získáme

$$t'\,(m_1 c + m_2 c + m_\mathrm{v} c_\mathrm{o}) = m_1 c t_1 + m_2 c t_2 + m_\mathrm{v} c_\mathrm{o} t_4,$$

$$t' = \frac{c\,(m_1 t_1 + m_2 t_2) + m_\mathrm{v} c_\mathrm{o} t_4}{c\,(m_1 + m_2) + m_\mathrm{v} c_\mathrm{o}} =$$

$$= \frac{4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\,(28\,\mathrm{kg}\cdot 63\,°\mathrm{C} + 42\,\mathrm{kg}\cdot 13\,°\mathrm{C}) + 50\,\mathrm{kg}\cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\cdot 20\,°\mathrm{C}}{4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}\,(28\,\mathrm{kg} + 42\,\mathrm{kg}) + 50\,\mathrm{kg}\cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot °C)}} \doteq$$

$$\doteq 32\,°\mathrm{C}.$$

4 body

FO58EF1–13: Automobil pod vodou

a) Plocha dveří o rozměrech $a = 115\,\mathrm{cm} = 1{,}15\,\mathrm{m}$ a $b = 90\,\mathrm{cm} = 0{,}9\,\mathrm{m}$ je $S = ab = 1{,}15\,\mathrm{m} \times 0{,}9\,\mathrm{m} = 1{,}035\,\mathrm{m}^2 \doteq 1{,}0\,\mathrm{m}^2$. V hloubce $h_1 = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$ pod hladinou bude hydrostatický tlak

$$p_1 = h_1 \varrho g = 0{,}1\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 1\,000\,\mathrm{Pa}.$$

Tlaková síla působící na dveře pak vychází $F_1 = p_1 S = 1\,000\,\mathrm{Pa}\cdot 1{,}035\,\mathrm{m}^2 = 1\,035\,\mathrm{N} \doteq 1\,000\,\mathrm{N}$.

2 body

b) Pokud auto stojí na kolech, bude horní část dveří v hloubce $h_2 = 10\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm} = 0{,}15$ m pod hladinou, spodní část v hloubce $h_3 = 10\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm} + 115\,\mathrm{cm} = 130\,\mathrm{cm} = 1{,}3\,\mathrm{m}$. Odpovídající hydrostatické tlaky vycházejí

$$p_2 = h_2 \varrho g = 0{,}15\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 1\,500\,\mathrm{Pa},$$

$$p_3 = h_3 \varrho g = 1{,}3\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{N/kg} = 13\,000\,\mathrm{Pa}.$$

Tlak roste lineárně s hloubkou a střední hodnota tlaku bude rovna tlaku v hloubce $h_4 = (h_2 + h_3)/2 = 0{,}725\,\mathrm{m}$ a bude rovna $p_4 = (p_2 + p_3)/2 = 7\,250\,\mathrm{Pa}$. Odpovídající tlaková síla pak vychází $F_4 = p_4 S = 7\,250\,\mathrm{Pa} \cdot 1{,}035\,\mathrm{m}^2 = {}$ $= 7\,503{,}75\,\mathrm{N} \doteq 7\,500\,\mathrm{N}$. **3 body**

c) Dveře můžeme považovat za páku s osou otáčení v pantech, tlaková síla má působiště uprostřed (v polovině šířky) dveří, tj ve vzdálenosti $l = b/2 = 0{,}45\,\mathrm{m}$ od osy otáčení. Nejvýhodnější je tlačit na konci dveří, tj. ve vzdálenosti $b = 0{,}9\,\mathrm{m}$ od osy otáčení (rameno síly, kterou působíme na dveře, je pak 2krát větší než u síly tlakové). Při poloze na boku stačí působit silou F_5, pro kterou platí

$$F_5 b = F_1 l; \qquad \Longrightarrow \qquad F_5 = F_1 \frac{l}{b} = \frac{F_1}{2} = 517{,}5\,\mathrm{N} \doteq 520\,\mathrm{N}.$$

Podobně pro auto stojící pod vodou na kolech dostáváme pro potřebnou sílu F_6

$$F_6 b = F_4 l; \qquad \Longrightarrow \qquad F_6 = F_4 \frac{l}{b} = \frac{F_4}{2} = 3\,751{,}875\,\mathrm{N} \doteq 3\,800\,\mathrm{N}.$$ **3 body**

d) Je-li auto na boku, síla potřebná k otevření dveří je asi $520\,\mathrm{N}$ (zhruba stejná, jako když zvedáme pytel cementu o hmotnosti $50\,\mathrm{kg}$) a posádka má šanci dveře otevřít. Pokud stojí auto na kolech, bude síla potřebná k otevření dveří asi $3\,800\,\mathrm{N}$ (jako kdybychom zvedali předmět o hmotnosti $380\,\mathrm{kg}$); posádka tedy nemá šanci dveře otevřít. Jediná možnost, jak se z auta dostat je rozbít okénko a počkat, až voda téměř zaplní prostor auta, čímž se vyrovná tlak z vnitřní a vnější strany a dveře půjdou otevřít. **2 body**