Řešení úloh 1. kola 59. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autor úloh: J. Thomas

1. a) Na dráze $l = vt$ bude zapotřebí objem paliva $V = \theta l = \theta v \Delta t$. Při jeho spálení se získá teplo

$$Q = mH = \rho V H = \rho \theta v H \Delta t.$$

Z toho se η využije na zajištění funkcí automobilu a na překonání odporu vzduchu

$$\eta \rho \theta v H \Delta t = P_1 \Delta t + F_o l = P_1 \Delta t + k v^3 \Delta t. \tag{1}$$

Odtud určíme spotřebu paliva

$$\theta = \frac{P_1 + kv^3}{\eta \rho v H} = \frac{1}{\eta \rho H}\left(\frac{P_1}{v} + kv^2\right) = 7{,}0 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}} = 7{,}0\ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}.$$

2 body

b) Hledáme minimum funkce $\theta = \dfrac{1}{\eta \rho H}\left(\dfrac{P_1}{v} + kv^2\right)$, tedy určíme její derivaci podle rychlosti, kterou položíme rovnu nule:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{\eta \rho H}\left(-\frac{P_1}{v^2} + 2kv\right) = 0.$$

Odtud $v_{\min} = \sqrt[3]{\dfrac{P_1}{2k}} = 9{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 35\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. (Druhá derivace by byla kladná, jde tedy o minimum). Minimální spotřeba pak bude

$$\theta_{\min} = \frac{1}{\eta \rho H}\left(\frac{P_1}{v_{\min}} + kv_{\min}^2\right) = \frac{1}{\eta \rho H}\left(\frac{P_1}{\sqrt[3]{\frac{P_1}{2k}}} + k\left(\sqrt[3]{\frac{P_1}{2k}}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{P_1^{2/3} k^{1/3}}{\eta \rho H}\left(2^{1/3} + 2^{-2/3}\right) = \frac{3}{\eta \rho H}\sqrt[3]{\frac{P_1^2 k}{4}} = 3{,}4 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}} = 3{,}4\ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}.$$

4 body

c) Při jízdě po silnici se stoupáním přibude v rovnici (1) navíc zvýšení potenciální energie tíhové

$$\eta \rho \theta v H \Delta t = P_1 \Delta t + F_o l + \Delta E_\mathrm{p} = P_1 \Delta t + k v^3 \Delta t + mg \sin\alpha \cdot v \Delta t.$$

Odtud spotřeba paliva

$$\theta_1 = \frac{1}{\eta \rho H}\left(\frac{P_1}{v} + kv^2 + mg\sin\alpha\right) = 2{,}1 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}} = 21\ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}.$$

Rychlost, při které bude spotřeba minimální, zůstává stejná, tedy

$$v_{\min} = \sqrt[3]{\frac{P_1}{2k}} = 9{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 35\ \mathrm{km \cdot h^{-1}},$$

minimální spotřeba paliva při jízdě ve stoupání pak

$$\theta_{1\,\mathrm{min}} = \frac{1}{\eta\rho H}\left(3\sqrt[3]{\frac{P_1^2 k}{4}} + mg\sin\alpha\right) = 1{,}7\cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}} = 17\ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}.$$

4 body

2. a) Celková hmotnost soli $m = m_1 + m_2 = c_{10}V + c_{20}V = (c_{10} + c_{20})V = 37{,}5$ g.

1 bod

b) Hmotnost roztoku v malé nádobce je $\delta m_{A\to B} = c_{10}v$. Po přidání do nádoby B bude ve druhé nádobě $m_B = c_{20}V + c_{10}v$ soli a její koncentrace bude

$$c_{21} = \frac{m_B}{V+v} = \frac{c_{20}V + c_{10}v}{V+v} = 5{,}19\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}.$$

1 bod

Při přenosu zpět bude v malé nádobce hmotnost soli $\delta m_{B\to A} = c_{21}v$. Po jejím přidání do nádoby A bude v první nádobě koncentrace

$$c_{11} = \frac{c_{10}\,(V-v) + c_{21}v}{(V-v)+v} = \frac{c_{10}\,(V-v) + \dfrac{c_{20}V + c_{10}v}{V+v}v}{V} =$$

$$= \frac{c_{10}\left(V^2 - v^2\right) + c_{20}Vv + c_{10}v^2}{V(V+v)} = \frac{c_{10}V^2 + c_{20}Vv}{V(V+v)} = \frac{c_{10}V + c_{20}v}{V+v} = 9{,}81\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}.$$

2 body

c) Vyjádříme rozdíl koncentrací

$$c_{11} - c_{21} = \frac{c_{10}V + c_{20}v}{V+v} - \frac{c_{20}V + c_{10}v}{V+v} = (c_{10} - c_{20})\,\frac{V-v}{V+v},$$

podobně po druhém přenosu

$$c_{12} - c_{22} = (c_{10} - c_{20})\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^2$$

a po k-tém přenosu

$$c_{1k} - c_{2k} = (c_{10} - c_{20})\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k = 2{,}25\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}. \qquad (1)$$

2 body

Protože se celkový objem roztoku nemění, nemění se ani součet koncentrací, proto

$$c_{1k} + c_{2k} = c_{10} + c_{20} \qquad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) po jejich sečtení dostáváme

$$c_{1k} = \frac{1}{2}c_{10}\left[1 + \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right] + \frac{1}{2}c_{20}\left[1 - \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right] = 8{,}62\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}},$$

po jejich odečtení

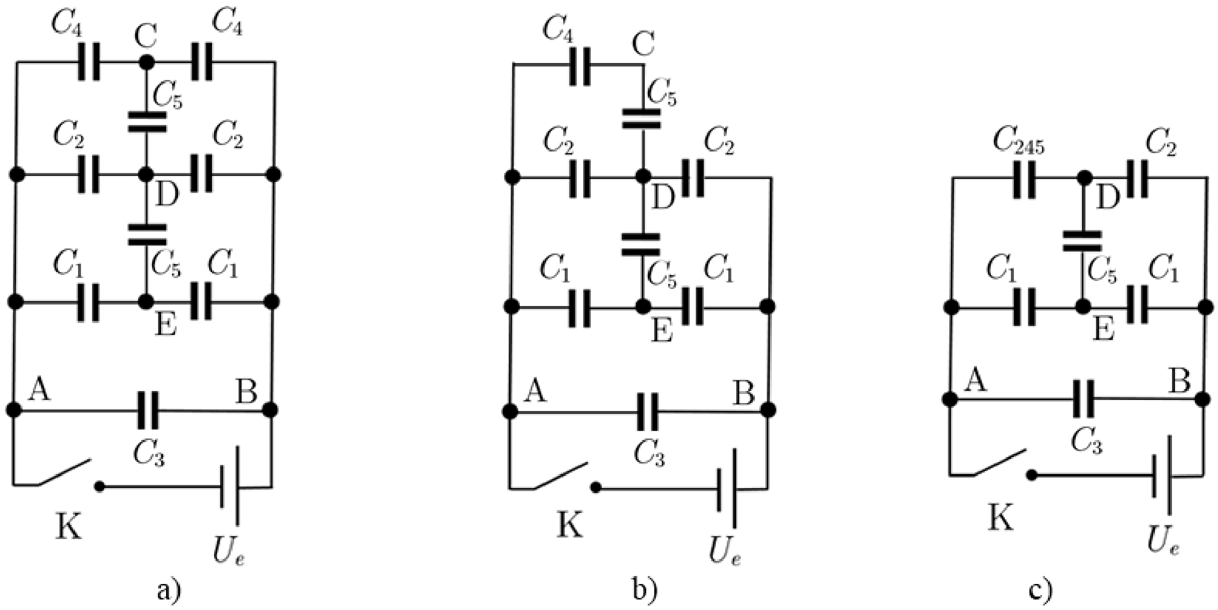
$$c_{2k} = \frac{1}{2}c_{10}\left[1 - \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right] + \frac{1}{2}c_{20}\left[1 + \left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right] = 6{,}38\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}.$$

2 body

d) Rozdíl koncentrací bude menší než 1 %, tedy

$$\frac{c_{1k}-c_{2k}}{c_{10}-c_{20}}=\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k<0{,}01 \quad\Rightarrow\quad k>\frac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\dfrac{V-v}{V+v}\right)}>57{,}5.$$

2 body



Obr. 1

3.a) Při překreslení schématu (obr. 1a) vidíme, že síť je symetrická, potenciál bodů C, D a E je stejný, proto na kondenzátorech s kapacitou C_5 bude nulové napětí a neponesou žádný náboj.

Výsledná kapacita tedy bude $C=\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{C_2}{2}+\dfrac{C_4}{2}+C_3=6{,}5\ \mu\text{F}$, celkový náboj $Q=CU_e=39\ \mu\text{C}$. Na kondenzátoru C_3 bude napětí $U_3=U_e$, na kondenzátorech C_1, C_2 a C_4 bude napětí $U_1=U_2=U_4=\dfrac{U_e}{2}$.

Náboje na kondenzátorech pak budou $Q_1=\dfrac{C_1U_e}{2}=3\ \mu\text{C}$; $Q_2=\dfrac{C_2U_e}{2}=$ $=6\ \mu\text{C}$; $Q_4=\dfrac{C_4U_e}{2}=12\ \mu\text{C}$; $Q_3=C_3U_e=18\ \mu\text{C}$. **5 bodů**

b) Bude-li ve schématu chybět jeden kondenzátor s kapacitou C_4, nebudou už body C, D a E na stejném potenciálu (obr. 1b)

Náboj a napětí na kondenzátoru s kapacitou C_3 se proti předchozímu schématu nezmění $Q_3=C_3U_e=18\ \mu\text{C}$.

Nahradíme trojici kondenzátorů mezi body A a D kondenzátorem C_{245} (obr. 1c):

$C_{245}=C_2+\dfrac{C_4C_5}{C_4+C_5}=\dfrac{38}{9}\ \mu\text{F}$.

Označme potenciál bodu D jako φ_D a potenciál bodu E jako φ_E. Potenciál bodu A $\varphi_\text{A}=0$ V, potenciál bodu B $\varphi_\text{B}=U_\text{e}$. Předpokládejme, že v bodě E bude větší potenciál než v bodě D. Pak ze zákona zachování náboje (celkový náboj v bodě D i v bodě E je nula):

$$C_1\varphi_E + C_5(\varphi_E - \varphi_D) = C_1(U_e - \varphi_E)\,,$$
$$C_{245}\varphi_D = C_5(\varphi_E - \varphi_D) + C_2(U_e - \varphi_D)\,.$$

Po číselném dosazení

$$101\varphi_D - 45\varphi_E = 108,$$
$$-5\varphi_D + 7\varphi_E = 6,$$

řešením soustavy dostaneme $\varphi_D = \frac{513}{241}\ \mathrm{V} = 2{,}13\ \mathrm{V}$, $\varphi_E = \frac{573}{241}\ \mathrm{V} = 2{,}38\ \mathrm{V}$.

Napětí na levém kondenzátoru o kapacitě C_1 tedy bude $U_{1AE} = \varphi_E = 2{,}38$ V, napětí na pravém kondenzátoru o kapacitě C_1 bude $U_{1EB} = U_e - \varphi_E = 3{,}62$ V. Jejich náboje pak budou $Q_{1AE} = 2{,}38\ \mu\mathrm{C}$ a $Q_{1EB} = 3{,}62\ \mu\mathrm{C}$.

Na kondenzátoru o kapacitě C$_5$ bude napětí $U_5 = \varphi_E - \varphi_D = 0{,}25$ V a náboj $Q_5 = C_5(\varphi_E - \varphi_D) = 1{,}24\ \mu\mathrm{C}$.

Na kondenzátoru o kapacitě C_2 mezi body D a B bude napětí $U_{2DB} = U_e - \varphi_D = 3{,}87$ V a náboj na něm bude $Q_{2DB} = C_2(U_e - \varphi_D) = 7{,}74\ \mu\mathrm{C}$.

Na kondenzátoru o kapacitě C_2 mezi body A a D je napětí $U_{\mathrm{AD}} = \varphi_D = 2{,}13$ V a náboj na něm pak $Q_{2AD} = C_2\varphi_D = 4{,}26\ \mu\mathrm{C}$.

Napětí na kondenzátorech C_4 a C_5 (mezi body A a D) je $U_{45} = \varphi_D = U_4 + U_{5CD} = 2{,}13$ V, a také $U_4C_4 = U_{5CD}C_5$, pak $U_4 = 1{,}18$ V, $U_{5CD} = 0{,}95$ V. Příslušné náboje pak budou $Q_4 = Q_{5CD} = U_4C_4 = U_{5CD}C_5 = 4{,}73\ \mu\mathrm{C}$.

Výslednou kapacitu tohoto zapojení určíme z jednoho ze vzorců:

$$C = \frac{Q_3 + Q_{1AE} + Q_{2AD} + Q_4}{U_e} = \frac{Q_3 + Q_{1EB} + Q_{2DB}}{U_e} = 4{,}9\ \mu\mathrm{F}.$$

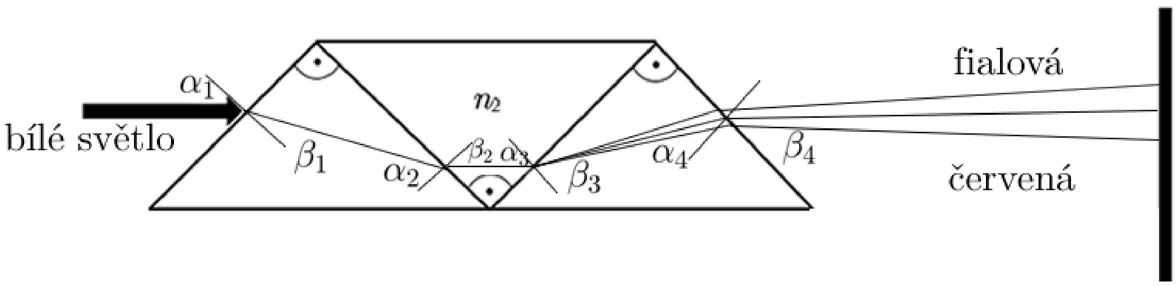
5 bodů

4.a) Označme α_1 až α_4 úhly dopadu a β_1 až β_4 úhly lomu – viz obr. 2. Protože jde o přímohledný hranol, musí být pro žluté světlo úhel

$$\beta_2 = \alpha_3 = 45°.$$

Dále platí

$$\beta_1 + \alpha_2 = 90°.$$



Obr. 2

Ze zákona lomu $\sin\beta_1 = \frac{n_v}{n_1}\sin 45° \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 28{,}0°$.

$$n_2 = n_1\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = n_1\frac{\sin(90° - \beta_1)}{\sin 45°} = 1{,}881.$$

2 body

b) Protože známe indexy lomu pro žluté a fialové světlo, můžeme ve vztahu $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ určit konstanty A a B. Z řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých pro první a třetí hranol vychází konstanty $A = 1{,}483$ a $B = 6\,600 \cdot 10^{-18}$ m^2, pro druhý hranol $A = 1{,}816$ a $B = 20\,150 \cdot 10^{-18}$ m^2. Hodnoty indexů lomu pro červené světlo pak budou $n_{č1} = 1{,}494$ a $n_{č2} = 1{,}851$. **3 body**

c) Průchod paprsků hranoly je znázorněn na obrázku. Postupně určíme úhly β_1, α_2, β_2, α_3, β_3, α_4 a β_4. Výsledky zapíšeme do tabulky.

	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3	α_4	β_4
žlutá $n_1 = 1{,}506$ $n_2 = 1{,}881$	45,0°	28,0°	62,0°	45,0°	45,0°	62,0°	28,0°	45,0°
fialová $n_{1f} = 1{,}525$ $n_{2f} = 1{,}944$	45,0°	27,6°	62,4°	44,0°	46,0°	66,5°	23,5°	37,5°
červená $n_{1č} = 1{,}494$ $n_{2č} = 1{,}851$	45,0°	28,2°	61,8°	45,3°	44,7°	60,6°	29,4°	47,3°

Fialový paprsek se odchýlí o úhel $\delta_f = 7{,}5°$ nahoru, červený paprsek se odchýlí o úhel $\delta_c = 2{,}3°$ směrem dolů. **3 body**

d) Šířka spektra na stínítku bude $y = y_f + y_c = l\,(\mathrm{tg}\,\delta_f + \mathrm{tg}\,\delta_c) = 26$ cm.

2 body

5. a, b) Rychlost elektronu se při pohybu magnetickém poli nemění, a protože intenzita elektrického pole je stále kolmá k trajektorii pohybu elektronu mezi deskami kondenzátoru, nemění se její velikost ani v elektrickém poli.

V magnetickém poli platí: $\frac{mv^2}{r} = BQv$,

v elektrickém poli platí: $\frac{mv^2}{R} = QE = Q\frac{U}{d}$.

Řešením soustavy rovnic dostaneme: $v = \frac{UR}{dBr} = 2{,}75 \cdot 10^8$ m · s^{-1}

a $m = \frac{B^2Qr^2d}{UR} = 2{,}26 \cdot 10^{-30}$ kg. **5 bodů**

Dosazením do vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\left(\frac{UR}{dBr}\right)^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{(UR)^2}{(dBrc)^2}}} =$$

$$= \frac{9{,}11\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}{\sqrt{1-\frac{\left(2,75.10^8\right)^2}{\left(3{,}00\cdot 10^8\right)^2}}} = 2{,}29\cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}.$$

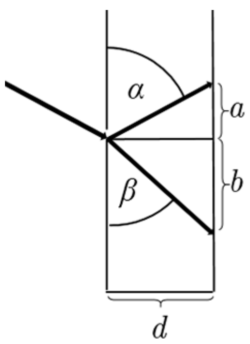
Odchylka od naměřené hodnoty je 1,1 %. **3 body**

c) Kinetická energie elektronu

$$E_\mathrm{k} = (m-m_0)\,c^2 = \left(\frac{B^2Qr^2d}{UR} - m_0\right)c^2 = 1{,}21\cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 760\ \mathrm{keV}.$$

2 body

6. Odvození vztahu pro index lomu: $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}}{\frac{d}{\sqrt{b^2+d^2}}} = \sqrt{\dfrac{b^2+d^2}{a^2+d^2}}$.



Obr. R3

$\frac{a}{\mathrm{mm}}$	$\frac{b}{\mathrm{mm}}$	$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	n
12	75	80	1,36
14	62	80	1,25
5	65	80	1,29
11	80	100	1,27
7	75	100	1,25
8	85	100	1,31
6	56	60	1,36
8	58	60	1,38
10	60	60	1,39
12	68	60	1,27

Index lomu vody: $n = (1{,}33 \pm 0{,}02)$ s relativní odchylkou 2 %.

7.a) V určitém časovém okamžiku je rozhraní mezi pevnou látkou a kapalinou ve vzdálenosti $x = v\cdot\tau$ od okraje, od kterého látka začala tuhnout. Za čas τ se uvolní teplo

$$Q = l_t\rho a h x = l_t\rho a h v\tau, \tag{1}$$

kde ρ je hustota látky v polštářku. Tímto teplem se ohřeje jak kapalná, tak pevná část látky v polštářku o Δt. Celková tepelná kapacita závisí na okamžitém složení látky:

$$Q = \left[c_0 \rho a h \left(l - x\right) + c_0 \left(1 - k\right) \rho a h x\right] \Delta t = c_0 \rho a h \left[\left(l - v\tau\right) + \left(1 - k\right) v\tau\right] \left(t - t_0\right). \quad (2)$$

2 body

Z rovnic (1) a (2) postupně dostaneme

$$c_0 \rho a h \left[\left(l - v\tau\right) + \left(1 - k\right) v\tau\right] \left(t - t_0\right) = l_t \rho a h v \tau,$$

$$c_0 \left(l - k v \tau\right) \left(t - t_0\right) = l_t v \tau.$$

Z toho plyne závislost teploty na čase

$$t = t_0 + \frac{l_t v \tau}{c_0 \left(l - k v \tau\right)} = t_0 + \frac{l_t v}{c_0 l} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{k v \tau}{l}\right)} \tau \approx t_0 + \frac{l_t v}{c_0 l} \left(1 + \frac{k v \tau}{l}\right) \tau.$$

2 body

b) Hledanou závislost okamžité časové změny teploty na čase získáme derivací:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \approx \frac{l_t v}{c_0 l} \left(1 + \frac{2 k v \tau}{l}\right).$$

Závislost rychlosti změny teploty na čase je přibližně lineární. **2 body**

c) Maximální teplotu bude mít polštářek v okamžiku, kdy krystalizační rozhraní dospěje na konec kvádru, tedy když $\tau = \dfrac{l}{v}$,

$$t_{\mathrm{max}} = t_0 + \frac{l_t l}{c_0 \left(l - k l\right)} = t_0 + \frac{l_t}{c_0} \frac{1}{\left(1 - k\right)} \approx t_0 + \frac{l_t}{c_0} (1 + k).$$

2 body

d) Během fázové přeměny se uvolnilo teplo

$$Q_{\mathrm{celk}} \approx \left[c_0 \rho a h \left(l - l\right) + c_0 \left(1 - k\right) \rho a h l\right] \frac{l_t}{c_0} \left(1 + k\right) =$$

$$= \left[\left(1 - k\right) \rho a h l\right] l_t \left(1 + k\right) = \rho a h l l_t \left(1 - k^2\right) = 0{,}99 \mathrm{m} l_t.$$

2 body