Zadání úloh 1. kola 59. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Spotřeba automobilu

Automobil o hmotnosti $m = 1\,300$ kg užívá palivo o hustotě $\rho = 720\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ s výhřevností $H = 42\ \mathrm{MJ \cdot kg^{-1}}$. Celkovou účinnost automobilu $\eta = 15\ \%$ považujeme za konstantní. Účinností zde myslíme podíl práce potřebné k zajištění jízdy automobilu a energie získané spálením paliva. Při jízdě je potřeba překonávat odpor vzduchu a zajistit další funkce automobilu (výkon potřebný k zajištění těchto funkcí $P_1 = 1{,}0$ kW považujeme za konstantní).

Odporová síla proti pohybu automobilu je přímo úměrná druhé mocnině jeho rychlosti, $F_o = kv^2$, kde konstanta $k = 0{,}55\ \mathrm{N \cdot s^2 \cdot m^{-2}}$.

Spotřeba automobilu $\theta = \dfrac{V}{L}$, kde V je objem spotřebovaného paliva a L je ujetá vzdálenost. Spotřeba se udává v jednotkách $\dfrac{\text{litr}}{100\ \text{km}}$.

a) Určete spotřebu paliva při stálé rychlosti automobilu $v = 80\ \ \mathrm{km \cdot\ h^{-1}}$ na přímé vodorovné silnici.

b) Určete, při jaké rychlosti automobilu bude jeho spotřeba minimální, a určete tuto spotřebu.

c) Jak se změní výsledky, když automobil pojede stejnou stálou rychlostí po přímé silnici s úhlem stoupání $\alpha = 3°$?

2. Přenos látky

Ve dvou nádobách A a B se nachází roztoky soli. Počáteční koncentrace je v první nádobě c_{10}, ve druhé nádobě c_{20}, počáteční objem V obou roztoků je na počátku stejný. Z první nádoby do druhé nádoby přeneseme malý objem v a po důkladném promíchání přeneseme stejný objem zase zpátky. Celý postup opakujeme.

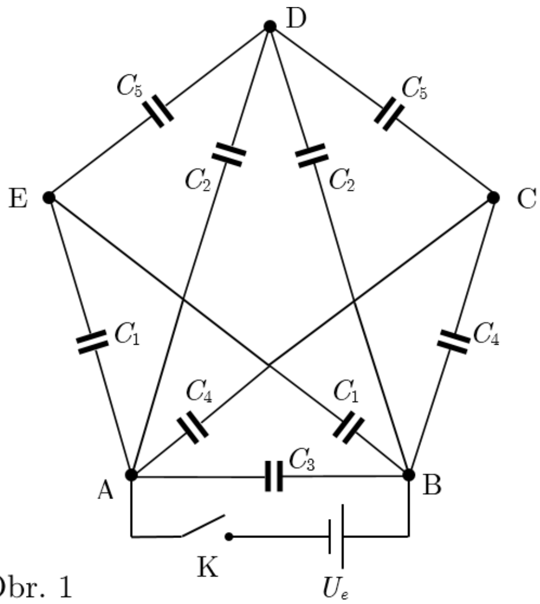
a) Určete celkovou hmotnost m soli v obou nádobách.

b) Jaké jsou koncentrace c_{11} a c_{21} v nádobách po prvním přenesení z A do B a zpět?

c) Jaký je rozdíl koncentrací $(c_{1k} - c_{2k})$ a jaké jsou koncentrace c_{1k} a c_{2k} po k-tém přenesení z A do B a zpět?

d) Kolikrát musíme přenést objem v, aby se koncentrace roztoků v nádobách lišily o méně než 1 % v porovnání s počátečním stavem?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $c_{10} = 10{,}0\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}$, $c_{20} = 5{,}0\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}$, $V = 2{,}50$ l, $v = 0{,}10$ l, $k = 10$.



Obr. 1

3. Pětiúhelník s kondenzátory

Mezi vrcholy pětiúhelníka je zapojeno 9 nenabitých kondenzátorů o kapacitách $C_1 = 1$ μF, $C_2 = 2$ μF, $C_3 = 3$ μF, $C_4 = 4$ μF a $C_5 = 5$ μF (obr. 1).

a) Určete výslednou kapacitu, náboje a napětí na každém z kondenzátorů, připojíme-li mezi body A a B ideální zdroj s elektromotorickým napětím $U_e = 6$ V.

b) Při opakování pokusu se zjistilo, že spojení mezi body B a C je přerušené. Jaké budou náboje a napětí na každém kondenzátoru a jaká bude výsledná kapacita v tomto případě?

4. Přímohledný hranol

Přímohledný hranol se skládá ze tří pravoúhlých hranolů z materiálů o indexu lomu n_1 a n_2 (obr. 2). Monofrekvenční světlo o vlnové délce $\lambda = 589$ nm po průchodu hranolem nezmění svůj směr. Ve vzdálenosti $l = 1{,}50$ m za hranolem je postaveno stínítko, na které tento paprsek dopadá kolmo. Pro vlnovou délku λ (žluté světlo) je index lomu prvního a třetího hranolu $n_1 = 1{,}506$. Pro vlnovou délku $\lambda_f = 397$ nm (fialové světlo) jsou indexy lomu prvního a druhého hranolu $n_{f1} = 1{,}525$ a $n_{f2} = {=}1{,}944$.

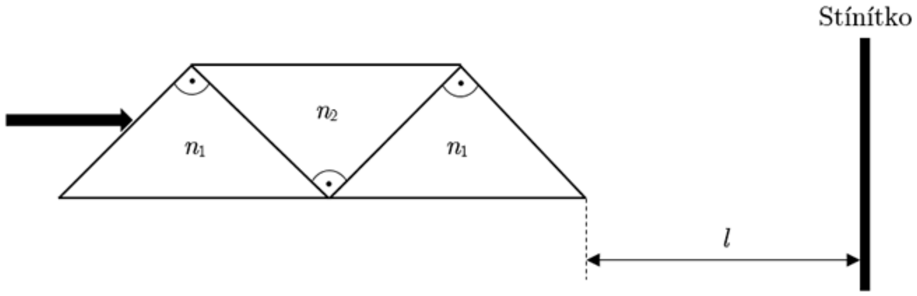
a) Určete index lomu n_2 prostředního hranolu.

b) Určete indexy lomu hranolů pro červené světlo o vlnové délce $\lambda_č = 761$ nm. Pro výpočet závislosti indexu lomu na vlnové délce užijte vztah $n = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$, kde A a B jsou konstanty.

c) Určete úhly, o které se odchýlí od přímého směru paprsek fialového světla o vlnové délce 397 nm a paprsek červeného světla o vlnové délce 761 nm.

d) Určete šířku spektra na stínítku při použití bílého světla.

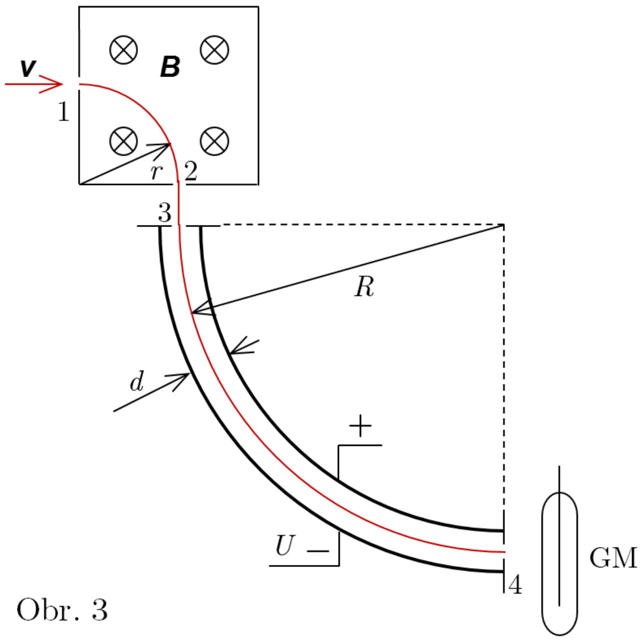
Rozměry hranolu jsou v porovnání se vzdáleností od stínítka zanedbatelné. Index lomu vzduchu $n_v = 1{,}000$.



Obr. 2

5. Měření hmotnosti elektronů

Na obrázku je pokusné zařízení, kterým můžeme experimentálně určit rychlost a hmotnost elektronů. Elektrony prochází štěrbinou 1 do homogenního magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B}$ kolmo k indukčním čarám, kde se při vhodně zvolené hodnotě B pohybují po čtvrtkružnici s poloměrem $r = 0{,}500$ m a vylétají štěrbinou 2. Poté vlétají štěrbinou 3 mezi desky válcového kondenzátoru. Ten je tvořen dvěma čtvrtválcovými plochami se společnou osou, vzdálenými od sebe o $d = 2{,}0$ cm, nabitými na napětí U. Intenzita elektrického pole $\boldsymbol{E}$ mezi deskami kondenzátoru je stále kolmá k trajektorii pohybu elektronů, které se tak při vhodně zvolené hodnotě U pohybují po čtvrtkružnici s poloměrem $R = 2{,}000$ m. Elektrony, které vyletují z kondenzátoru štěrbinou 4, jsou registrovány Geigerův-Müllerovým počítačem.



Obr. 3

GM počítač zaznamenal dopady elektronů při $B = 7{,}76$ mT a $U = 10{,}68$ kV.

a) Určete rychlost, kterou elektron vstupuje do magnetického pole.

b) Určete hmotnost elektronu registrovaného Geigerův-Müllerovým počítačem. Porovnejte vypočtenou hmotnost s hmotností určenou z relativistického vztahu $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

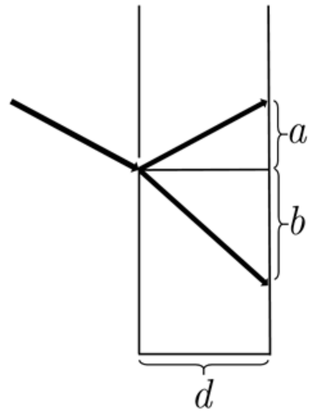
c) Určete v elektronvoltech kinetickou energii elektronu registrovaného Geigerův-Müllerovým počítačem.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Klidová hmotnost elektronu je $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

6. Měření indexu lomu kapaliny

Pomůcky: Plastové láhve různých průměrů s hladkými stěnami (s otvorem v boční stěně), voda nebo jiná průhledná kapalina, laserové ukazovátko (nebo školní laser), posuvné měřidlo, milimetrové měřítko.

Postup práce: Do boční stěny širší plastové láhve s hladkými stěnami navrtáme otvor o průměru asi 3 mm. V úrovni otvoru změříme posuvným měřidlem průměr láhve d. Do láhve nalijeme kapalinu, jejíž index lomu chceme měřit tak, aby hladina byla právě v rovině otvoru. Do otvoru namíříme laserový paprsek a na protější stěně láhve změříme milimetrovým měřítkem vzdálenosti stop a a b odraženého a lomeného paprsku od hladiny kapaliny.



Obr. 4

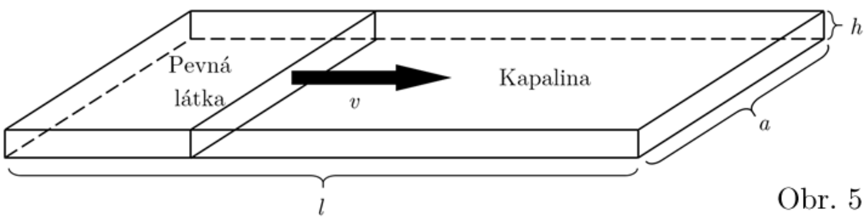
Úkoly: a) Odvoďte vztah pro určení indexu lomu pomocí naměřených vzdáleností a, b a d.
b) Vypočtěte index lomu a určete odchylky měření.

7. Hřejivé polštářky

V záchranné lékařské praxi se užívají hřejivé polštářky, které využívají tepla uvolněného při krystalizaci kapaliny, nacházející se uvnitř polštářku. Iniciace se provádí pomocí katalyzátoru, takže k ní může dojít v poměrně širokém rozsahu teplot. Vnitřní objem polštářku si můžeme představit jako kvádr o rozměrech $a \times l \times h$ (obr. 5). Krystalizace začíná u stěny kvádru s rozměry a, h, rozhraní mezi pevnou látkou a kapalinou se pohybuje ve směru hrany l malou stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$.

a) Najděte závislost teploty polštářku t na čase τ.
b) Najděte závislost časové změny teploty polštářku $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$ na čase τ.
c) Jaká bude nejvyšší teplota polštářku $t_{\max}$?
d) Správnost výsledku c) ověřte porovnáním uvolněného tepla Q_{celk} se skupenským teplem tání $L_t = ml_t$.

Měrné skupenské teplo tání pracovní látky je l_t, měrná tepelná kapacita pracovní látky v kapalném stavu je c_0, v pevném stavu je měrná tepelná kapacita pracovní látky o $k = 10\ \%$ menší. Počáteční teplota látky je t_0. Změnu hustoty pracovní látky a ztráty tepla do okolí během krystalizace zanedbejte. Pracovní látka je dokonale tepelně vodivá, takže teplota látky je v každém okamžiku stejná v celém objemu kvádru. Při řešení použijte vztah $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, který je pro $x \leq 0{,}1$ splněn s odchylkou menší než 1 %.



Obr. 5