Řešení úloh krajského kola 59. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autor úloh: J. Thomas

1. a) Výška sloupce vody nad společnou hladinou je $y_1 = 1{,}5l$, výška sloupce rtuti nad společnou hladinou je $y_2 = y_1 \dfrac{\rho_v}{\rho_{\mathrm{Hg}}} = 1{,}5l \cdot \dfrac{1}{13{,}6} = 0{,}11l$.

V levé části trubice je hladina rtuti ve výšce $\dfrac{l}{4} - \dfrac{y_2}{2} = \dfrac{l}{4} - y_1 \dfrac{\rho_v}{2\rho_{\mathrm{Hg}}} = 0{,}195l$ a hladina vody ve výšce $h_1 = \dfrac{l}{4} - \dfrac{y_2}{2} + 1{,}5l = \dfrac{l}{4} - y_1 \dfrac{\rho_v}{2\rho_{\mathrm{Hg}}} + 1{,}5l = \dfrac{l}{4}\left(7 - 3\dfrac{\rho_v}{\rho_{\mathrm{Hg}}}\right) = 1{,}695l$.

V pravé části trubice je pak hladina rtuti ve výšce

$$h_2 = \frac{l}{4} + \frac{y_2}{2} = \frac{l}{4}\left(1 + 3\frac{\rho_v}{\rho_{\mathrm{Hg}}}\right) = 0{,}305l.$$

3 body

b) Při otáčení U-trubice působí na každý element hmotnosti $\mathrm{d}m = S\rho \mathrm{d}r$ setrvačná odstředivá síla, jejíž velikost závisí na vzdálenosti od osy otáčení

$$F = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}m\omega_1^2 r = \int_{r_1}^{r_2} S\rho\omega_1^2 r \mathrm{d}r = S\rho\omega_1^2 \frac{r_2^2 - r_1^2}{2}.$$

Na sloupec vody ve vodorovné části trubice působí setrvačná odstředivá síla

$$F_1 = S\rho_v\omega_1^2 \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{8} S\rho_v\omega_1^2 l^2,$$

na sloupec rtuti ve vodorovné části trubice působí setrvačná odstředivá síla

$$F_2 = S\rho_{\mathrm{Hg}}\omega_1^2 \frac{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{3}{8}\,\mathrm{S}\rho_{\mathrm{Hg}}\omega_1^2 l^2.$$

Součet těchto sil je v rovnováze s tlakovou silou $F = S\left(p_2 - p_1\right)$, kde $p_2 = l\rho_{\mathrm{Hg}} g$ je hydrostatický tlak pravého sloupce rtuti a $p_1 = l\rho_v g$ je hydrostatický tlak levého sloupce vody:

$$\frac{1}{8} S\rho_v\omega_1^2 l^2 + \frac{3}{8}\,\mathrm{S}\rho_{\mathrm{Hg}}\omega_1^2 l^2 = Slg\left(\rho_{\mathrm{Hg}} - \rho_v\right) \;\Rightarrow\; \omega_1 = 2\sqrt{\frac{2\left(\rho_{\mathrm{Hg}} - \rho_v\right) g}{l\left(3\,\rho_{\mathrm{Hg}} + \rho_v\right)}} = 11\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}.$$

4 body

c) Protože svislá část trubice má délku $2l$ a sloupec rtuti délku $1{,}5l$, znamená to, že pod rtutí je ještě sloupec vody vysoký $0{,}5l$ a zbytek vody právě vyplňuje vodorovnou část trubice.

Na tento sloupec vody působí setrvačná odstředivá síla $F_3 = S\rho_v\omega_2^2\frac{l^2}{2}$, která je v rovnováze s tlakovou silou vyvolanou hydrostatickým tlakem sloupce rtuti a části sloupce vody

$$F_4 = S\left(p_3 + p_4\right) = S\left(1{,}5l\rho_{\mathrm{Hg}}g + 0{,}5l\rho_v g\right),$$

$$\rho_v\omega_2^2\frac{l^2}{2} = 1{,}5l\rho_{\mathrm{Hg}}g + 0{,}5l\rho_v g \quad\Rightarrow\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2\left(1{,}5\rho_{\mathrm{Hg}} + 0{,}5\rho_v\right)g}{\rho_v l}} = 45\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

3 body

2. a) Průměrnou rychlost molekul určíme ze vztahu

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi 720 m_u}} = 164\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

2 body

b) Aby molekula fullerenu proletěla oběma štěrbinami, musí proletět mezi kotouči za stejnou dobu, za kterou se kotouče pootočí o úhel $\Delta\varphi$. Pak

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi f} = \frac{d}{\overline{v}} \quad\Rightarrow\quad f = \frac{\overline{v}\Delta\varphi}{2\pi d} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi d}\sqrt{\frac{8kT}{\pi 720 m_u}} = 23\ \mathrm{Hz}.$$

2 body

c) Vlnová délka fullerenu podle de Broglieho vztahu

$$\lambda = \frac{h}{m_0\overline{v}} = \frac{h}{720 m_u}\sqrt{\frac{720\pi m_u}{8kT}} = h\sqrt{\frac{\pi}{5\,760 kT m_u}} = 3{,}4\cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}.$$

3 body

Z podmínky pro maximum na mřížce: $b\sin\alpha = k\lambda$ a protože pro malé úhly $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{l} \cong \sin\alpha$, bude pro vzdálenost y maxima 1. řádu od maxima 0. řádu platit

$$y = \frac{\lambda l}{b} = \frac{hl}{b m_0\overline{v}} = \frac{hl}{b}\sqrt{\frac{\pi}{5\,760 kT m_u}} = 42\ \mu\mathrm{m}.$$

3 body

3. a) Tepelný výkon procházející destičkou závisí na rozdílu teplot:

$$\frac{Q}{\tau} = S\lambda_1\frac{\Delta t_1}{l} = S\lambda_2\frac{\Delta t_2}{l} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1\Delta t_1 = \lambda_2\Delta t_2,$$

pro pokles teplot dále platí: $\Delta t_1 + \Delta t_2 = t_1 - t_2$. Dosazením za Δt_2: $\Delta t_2 = \frac{\lambda_1\Delta t_1}{\lambda_2}$ můžeme vyjádřit $\Delta t_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(t_1 - t_2\right)$.

Teplota na rozhraní obou prostředí pak bude

$$t = t_1 - \Delta t_1 = t_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(t_1 - t_2\right) = \frac{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

3 body

b) 1. Plošná hustota náboje na společném rozhraní je stejná: $E_1\varepsilon_1 = E_2\varepsilon_2$.
Pro spád potenciálů platí: $\varphi_1 - \varphi_2 = E_1 l + E_2 l$. Úpravou těchto vztahů dostaneme:

$$E_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{a} \quad E_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

2 body

2. Potenciál uprostřed destičky bude

$$\varphi = \varphi_2 + E_2 l = \varphi_2 + (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

2 body

c) Proud v levé a v pravé části je stejný:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{\rho_1 \frac{l}{S}} = \frac{\varphi - \varphi_2}{\rho_2 \frac{l}{S}},$$

odtud

$$\varphi = \frac{\varphi_1\rho_2 + \varphi_2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}.$$

3 body

4. a) Z kalorimetrické rovnice

$$C_0\left(t_{A0} - t_{B1}\right) = cm\left(t_{B1} - t_{B0}\right) \quad \Rightarrow \quad t_{B1} = \frac{C_0 t_{A0} + cmt_{B0}}{C_0 + cm} = 19{,}0\ °\text{C},$$

po přenesení tělíska zpět do nádoby A pak

$$C_0\left(t_{A1} - t_{B1}\right) = cm\left(t_{A0} - t_{A1}\right) \quad \Rightarrow \quad t_{A1} = \frac{cmt_{A0} + C_0 t_{B1}}{C_0 + cm} =$$

$$= \frac{cmt_{A0} + C_0\frac{C_0 t_{A0} + cmt_{B0}}{C_0 + cm}}{C_0 + cm} = \frac{cmt_{A0}\left(C_0 + cm\right) + C_0\left(C_0 t_{A0} + cmt_{B0}\right)}{\left(C_0 + cm\right)^2} = 79\ °\text{C}.$$

2 body

b) Rozdíl teplot nádobách po prvním přenosu

$$t_{A1} - t_{B1} = \frac{cmt_{A0}\left(C_0 + cm\right) + C_0\left(C_0 t_{A0} + cmt_{B0}\right)}{\left(C_0 + cm\right)^2} - \frac{C_0 t_{A0} + cmt_{B0}}{C_0 + cm} =$$

$$= \frac{cmt_{A0}\left(C_0 + cm\right) + C_0\left(C_0 t_{A0} + cmt_{B0}\right) - \left(C_0 + cm\right)\left(C_0 t_{A0} + cmt_{B0}\right)}{\left(C_0 + cm\right)^2} =$$

$$= \frac{(cm)^2}{\left(C_0 + cm\right)^2}\left(t_{A0} - t_{B0}\right) = \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^2\left(t_{A0} - t_{B0}\right).$$

2 body

c) Podobně po k-tém přenosu

$$t_{\mathrm{A}k} - t_{\mathrm{B}k} = \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\left(t_{\mathrm{A0}} - t_{\mathrm{B0}}\right) = 48\ °\text{C}. \tag{1}$$

2 body

Napíšeme kalorimetrickou rovnici pro k přenosů:

$$(C_0 + cm)\,(t_{A0} - t_{Ak}) = cm\,(t_{Bk} - t_{B0})\,.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$(C_0 + cm)\,t_{A0} + cmt_{B0} = (C_0 + cm)\,t_{Ak} + cmt_{Bk}.$$

Uvážíme-li, že $C_0 \ll cm$, můžeme napsat

$$t_{A0} + t_{B0} = t_{Ak} + t_{Bk}. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) pak po jejich sečtení

$$t_{Ak} = \frac{1}{2}t_{A0}\left[1 + \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right] + \frac{1}{2}t_{B0}\left[1 - \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right] = 73\ °\mathrm{C}$$

a jejich odečtením

$$t_{Bk} = \frac{1}{2}t_{A0}\left[1 - \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right] + \frac{1}{2}t_{B0}\left[1 + \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right] = 25\ °\mathrm{C}.$$

2 body

d) Ze vztahu (1) plyne

$$\frac{t_{Ak} - t_{Bk}}{t_{A0} - t_{B0}} = \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k} < 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad k > \frac{\ln 0{,}03}{2\ln\dfrac{cm}{C_0 + cm}} = 111{,}3.$$

Muselo by dojít k alespoň 112 přelitím. **2 body**

Řešení úkolu c) bez uvážení, že $C_0 \ll cm$:

Ze vztahu $t_{Ak} - t_{Bk} = \left(\dfrac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}(t_{A0} - t_{B0})$ a úpravou kalorimetrické rovnice $(C_0 + cm)\,(t_{A0} - t_{Ak}) = cm\,(t_{Bk} - t_{B0})$ na tvar $\dfrac{C_0 + cm}{cm}t_{A0} + t_{B0} = \dfrac{C_0 + cm}{cm}t_{Ak} + t_{Bk}$ vyjádříme

$$t_{Ak} = \left[\frac{C_0 + mc}{2mc + C_0} + \frac{cm}{2cm + C_0}\left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right]t_{A0} +$$
$$+ \left\{\frac{cm}{2mc + C_0}\left[1 - \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right]\right\}t_{B0} = \frac{C_0 + mc}{2mc + C_0}t_{A0} +$$
$$+ \frac{cm}{2mc + C_0}\left\{t_{A0}\left[\frac{cm}{2cm + C_0}\left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right] + t_{B0}\left[1 - \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right]\right\},$$

$$t_{Bk} = t_{Ak} - (t_{A0} - t_{B0})\left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k} = \left[\frac{C_0 + mc}{2mc + C_0} - \frac{cm}{2cm + C_0}\left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right]t_{A0} +$$
$$+ \left[\frac{cm}{2cm + C_0} + \frac{C_0 + mc}{2mc + C_0}\left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^{2k}\right]t_{B0}.$$