Řešení úloh celostátního kola 59. ročníku fyzikální olympiády

Úlohy navrhl J. Thomas

1. a) Rovnice rozpadu je ${}^{238}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{234}_{92}\mathrm{U}$;

$$Q = E_r = \left[m\left({}^{238}_{94}\mathrm{Pu}\right) - m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) - m\left({}^{234}_{92}\mathrm{U}\right)\right]\ c^2 = 9{,}17 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 5{,}71\ \mathrm{MeV}.$$

2 body

b) K dosažení výkonu $P_0 = 2{,}00$ kW musí být počáteční aktivita radioizotopu $A_0 = \dfrac{P_0}{Q}$.

Protože $A_0 = \lambda N = \dfrac{\ln 2}{T} \dfrac{m}{m\left({}^{238}_{94}\mathrm{Pu}\right)} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{A_0 T m\left({}^{238}_{94}\mathrm{Pu}\right)}{\ln 2} = \frac{P_0 T m\left({}^{238}_{94}\mathrm{Pu}\right)}{Q \ln 2} = 3{,}46\ \mathrm{kg}.$$

2 body

c) Aktivita vzorku klesne za dobu t z A_0 na A. Ze zákona radioaktivní přeměny:

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{687}{87{,}7 \cdot 365{,}25}} = 0{,}985 = 98{,}5\ \%.$$

Aktivita vzorku se tedy zmenší jen o 1,5 %.

2 body

d) Počáteční elektrický výkon je $P_1 = 0{,}06 P_0 = 120$ W klesne na $P_2 = 100$ W. Protože aktivita vzorku a získaný výkon jsou veličiny přímo úměrné, můžeme psát

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{A}{A_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{87{,}7}} \quad \Rightarrow \quad t = T \frac{\log \frac{P_2}{P_1}}{\log \frac{1}{2}} = 87{,}7\ \text{roku} \frac{\log \frac{5}{6}}{\log \frac{1}{2}} = 23\ \text{let}.$$

2 body

e) Výkon jednoho pulzu je

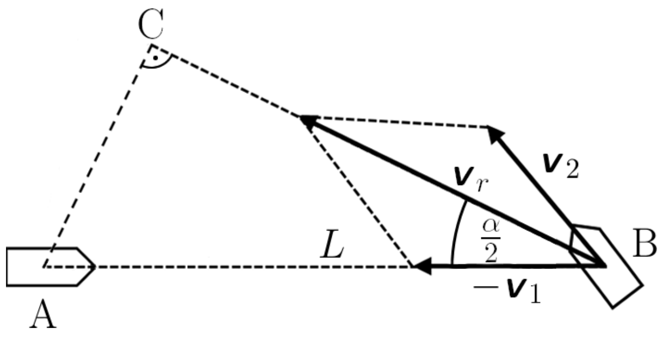
$$P = \frac{E_1}{\tau} = \frac{0{,}030\ \mathrm{J}}{5{,}0 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}} = 6{,}0\ \mathrm{MW}.$$

Počet fotonů v jednom pulzu pak je $N = \dfrac{E_1}{\frac{hc}{\lambda}} = \dfrac{\lambda E_1}{hc} = 1{,}6 \cdot 10^{17}$.

2 body

2. a) Zvolme si vztažnou soustavu spojenou s lodí A. V této soustavě se loď B pohybuje vzhledem k lodi A po přímce s relativní rychlostí $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ (obr. 1). Hledáme velikost úhlopříčky v kosočtverci:

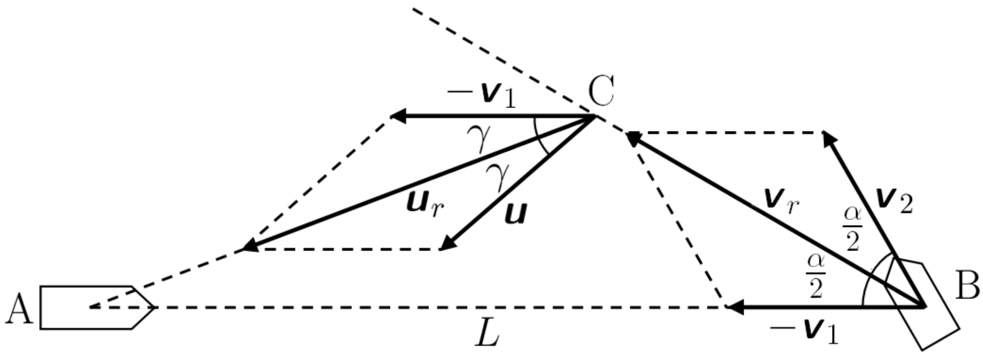
$$|\boldsymbol{v}_r| = 2v\cos\frac{\alpha}{2}.$$



Obr. R1

Nejmenší vzdálenost mezi loděmi pak bude $l_{\min} = L\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}$.

2 body



Obr. R2

b) Vypustíme-li člun v libovolné poloze C lodi B, je v soustavě spojené s lodí A velikost jeho rychlosti

$$u_r = 2v\cos\gamma. \tag{1}$$

Označme t dobu plavby člunu z místa C k lodi A. Podle sinové věty platí

$$\frac{u_r t}{L} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \gamma\right)} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin\left(150^\circ - \gamma\right)}.$$

Z toho plyne

$$t = \frac{L}{u_r}\frac{1}{2\sin\left(150^\circ - \gamma\right)}.$$

Užitím vztahu (1) dostaneme

$$t = \frac{L}{4v\cos\gamma\left(\sin 150^\circ\cos\gamma - \cos 150^\circ\sin\gamma\right)} =$$

$$= \frac{L}{4v\cos\gamma\left(\dfrac{1}{2}\cos\gamma + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right)} = \frac{L}{2v}\frac{1}{\cos\gamma\left(\cos\gamma + \sqrt{3}\sin\gamma\right)}.$$

Pomocí derivace hledáme takový úhel γ, pro který je jmenovatel druhého zlomku maximální:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\cos\gamma\left(\cos\gamma+\sqrt{3}\sin\gamma\right)=$$

$$=-\sin\gamma\left(\cos\gamma+\sqrt{3}\sin\gamma\right)+\cos\gamma\left(-\sin\gamma+\sqrt{3}\cos\gamma\right)=$$

$$=\sqrt{3}\left(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma\right)-2\sin\gamma\cos\gamma=\sqrt{3}\cos 2\gamma-\sin 2\gamma.$$

Z podmínky nulové derivace dostaneme

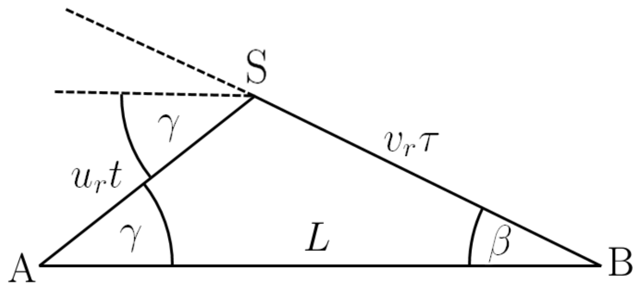
$$\operatorname{tg} 2\gamma=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad\gamma=30^\circ.$$

Pro tento úhel dostaneme hledanou minimální dobu

$$t_{\min}=\frac{L}{2v}\frac{1}{\cos 30^\circ\left(\cos 30^\circ+\sqrt{3}\sin 30^\circ\right)}=\frac{L}{3v}$$

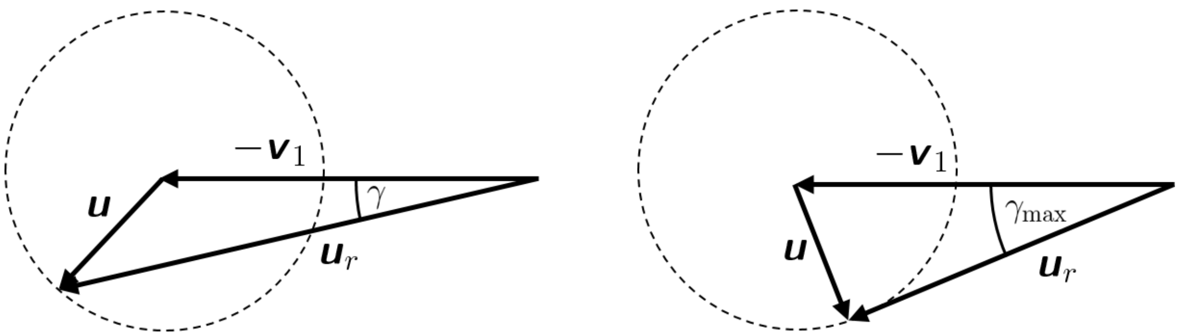
3 body

c) V soustavě spojené s lodí A je úhel $\beta=\frac{\alpha}{2}$, loďka bude mít rychlost $\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_1$ a bude svírat s přímkou AB úhel γ (obr. R3).



Obr. R3

Z obrázku je vidět, že doba τ (a s ní spojená vzdálenost $v_r\tau$) bude maximální při největším úhlu γ mezi směrem relativní rychlosti $\boldsymbol{u}_r$ a úsečkou AB. Maximální velikost úhlu γ lze najít, sestrojíme-li diagram rychlostí (obr. R4). Vektor rychlosti člunu $\boldsymbol{u}$ může mít teoreticky libovolný směr, jeho vrchol může být v libovolném místě na kružnici. Úhel γ bude maximální, bude-li mít rychlost $\boldsymbol{u}_r$ směr tečny k této kružnici. Pak $\sin\gamma_{\max}=\dfrac{u}{v}$.



Obr. 4

Podle sinové věty z trojúhelníka ABS

$$\frac{v_r \tau_{\max}}{\sin \gamma_{\max}} = \frac{L}{\sin\left(\pi - \beta - \gamma_{\max}\right)}.$$

Odtud hledaná doba

$$\tau_{\max} = \frac{L}{v_r} \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin\left(\beta + \gamma_{\max}\right)} = \frac{L}{2v \cos \beta} \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin \beta \cos \gamma_{\max} + \sin \gamma_{\max} \cos \beta} =$$

$$= \frac{L}{v} \frac{\sin \gamma_{\max}}{\sin 2\beta \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_{\max}} + \sin \gamma_{\max} 2 \cos^2 \beta} = \frac{L}{v} \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 1} + 3}.$$

Vidíme, že při $u \to 0 \quad \tau_{\max} \to 0$;
při $u = v \quad \tau_{\max} = \dfrac{2L}{3v}$;
při $u > v$ může člun dohnat loď A kdykoli.

3 body

d) Rychlost náboje bude minimální, bude-li vržen pod úhlem $\alpha = 45°$, když bude vzdálenost lodí minimální, tedy $\dfrac{L}{2}$. Pro délku vrhu pak

$$l_{\min} = \frac{v_{\min}^2}{g} \quad \Rightarrow \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{Lg}{2}}.$$

2 body

3. a) Při dotyku malé kuličky a velké koule budou mít obě stejný potenciál.

$$\varphi = \frac{Q}{C + c_0} = \frac{q}{c_0}.$$

Odtud $q = \dfrac{c_0}{C + c_0} Q$. Protože kapacita kulového vodiče závisí na jeho poloměru $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, je hledaný součinitel $\gamma = \dfrac{c_0}{C + c_0} = \dfrac{r}{R + r}$.

2 body

b) Potenciál koule A po dotyku malé kuličky bude $\varphi_{\mathrm{A0}} = \dfrac{Q_{\mathrm{A0}}}{C + c_0}$. Náboj malé kuličky bude $q = \dfrac{Q_{\mathrm{A0}} c_0}{C + c_0} = c_0 \varphi_{\mathrm{A0}}$; na kouli zůstane náboj $C\varphi_{\mathrm{A0}}$. Dotkneme-li se nyní malou kuličkou koule B, bude na soustavě celkový náboj $C\varphi_{\mathrm{B0}} + c_0\varphi_{\mathrm{A0}}$ a její potenciál bude

$$\varphi_{\mathrm{B1}} = \frac{C\varphi_{\mathrm{B0}} + c_0\varphi_{\mathrm{A0}}}{C + c_0} = (1 - \gamma)\,\varphi_{\mathrm{B0}} + \gamma\varphi_{\mathrm{A0}}.$$

Na malé kuličce zůstane náboj $q = c_0\varphi_{\mathrm{B1}}$, na kouli B zůstane náboj $Q_{\mathrm{B1}} = C\varphi_{\mathrm{B1}}$. Při dotyku koule A bude celkový náboj $(C\varphi_{\mathrm{A0}} + c_0\varphi_{\mathrm{B1}})$, jejich potenciál bude

$$\varphi_{\mathrm{A1}} = \frac{C\varphi_{\mathrm{A0}} + c_0\varphi_{\mathrm{B1}}}{C + c_0} = (1 - \gamma)\,\varphi_{\mathrm{A0}} + \gamma\varphi_{\mathrm{B1}}.$$

Rozdíly potenciálů budou

$$\varphi_{\mathrm{A0}} - \varphi_{\mathrm{B1}} = \varphi_{\mathrm{A0}} - (1-\gamma)\,\varphi_{\mathrm{B0}} - \gamma\varphi_{\mathrm{A0}} = (1-\gamma)\,(\varphi_{\mathrm{A0}} - \varphi_{\mathrm{B0}})$$

$$\varphi_{\mathrm{A1}} - \varphi_{\mathrm{B1}} = (1-\gamma)\,\varphi_{\mathrm{A0}} + \gamma\varphi_{\mathrm{B1}} - \varphi_{\mathrm{B1}} = (1-\gamma)\,(\varphi_{\mathrm{A0}} - \varphi_{\mathrm{B1}}) = (1-\gamma)^2\,(\varphi_{\mathrm{A0}} - \varphi_{\mathrm{B0}}).$$

Provedeme-li k přenosů, bude

$$\varphi_{\mathrm{A}k} - \varphi_{\mathrm{B}k} = (1-\gamma)^{2k}\,(\varphi_{\mathrm{A0}} - \varphi_{\mathrm{B0}})\,. \tag{1}$$

Uvážíme-li, že přenášený náboj je v porovnání s náboji velkých koulí zanedbatelný a že potenciál je úměrný náboji, můžeme napsat

$$Q_{\mathrm{A}k} - Q_{\mathrm{B}k} = (1-\gamma)^{2k}\,(Q_{\mathrm{A0}} - Q_{\mathrm{B0}})$$

a podle zákona zachování náboje

$$Q_{\mathrm{A}k} + Q_{\mathrm{B}k} = Q_{\mathrm{A0}} + Q_{\mathrm{B0}}. \tag{2}$$

Sečtením vztahů dostaneme

$$Q_{\mathrm{A}k} = \frac{1}{2}Q_{\mathrm{A0}}\left[1 + (1-\gamma)^{2k}\right] + \frac{1}{2}Q_{\mathrm{B0}}\left[1 - (1-\gamma)^{2k}\right] = 8{,}5\ \mathrm{nC}$$

a jejich odečtením

$$Q_{\mathrm{B}k} = \frac{1}{2}Q_{\mathrm{A0}}\left[1 - (1-\gamma)^{2k}\right] + \frac{1}{2}Q_{\mathrm{B0}}\left[1 + (1-\gamma)^{2k}\right] = 2{,}5\ \mathrm{nC}.$$

5 bodů

c) Rozdíl nábojů má být menší, než 1 % součtu původních nábojů, tedy

$$\frac{Q_{\mathrm{Ak}} - Q_{\mathrm{Bk}}}{Q_{\mathrm{A0}} + Q_{\mathrm{B0}}} = \frac{(Q_{\mathrm{A0}} - Q_{\mathrm{B0}})\,(1-\gamma)^{2k}}{Q_{\mathrm{A0}} + Q_{\mathrm{B0}}} = \frac{\left(\dfrac{Q_{\mathrm{A0}}}{Q_{\mathrm{B0}}} - 1\right)}{\left(\dfrac{Q_{\mathrm{A0}}}{Q_{\mathrm{B0}}} + 1\right)}(1-\gamma)^{2k} = 0{,}01$$

$$k = \frac{\ln\left[0{,}01\frac{\left(\frac{Q_{\mathrm{A0}}}{Q_{\mathrm{B0}}}+1\right)}{\left(\frac{Q_{\mathrm{A0}}}{Q_{\mathrm{B0}}}-1\right)}\right]}{2\ln(1-\gamma)} = 110.$$

3 body

Přesné řešení části b):

Z rovnice (1) $\dfrac{Q_{\mathrm{A}k}}{C+c_0} - \dfrac{Q_{\mathrm{B}k}}{C} = (1-\gamma)^{2k}\left(\dfrac{Q_{\mathrm{A0}}}{C+c_0} - \dfrac{Q_{B0}}{C}\right) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{C}{C+c_0}Q_{\mathrm{A}k} - Q_{\mathrm{B}k} = (1-\gamma)^{2k}\left(\frac{C}{C+c_0}Q_{\mathrm{A0}} - Q_{\mathrm{B0}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (1-\gamma)\,Q_{\mathrm{A}k} - Q_{\mathrm{B}k} = \left\{(1-\gamma)\,Q_{\mathrm{A0}} - Q_{\mathrm{B0}}\right\}(1-\gamma)^{2k}\,.$$

a ze zákona zachování náboje (2) $Q_{\mathrm{A}k} + Q_{\mathrm{B}k} = Q_{\mathrm{A0}} + Q_{\mathrm{B0}}$

sečtením a úpravou dostaneme náboj koule A:

$$Q_{\mathrm{A}k} = \frac{1}{2-\gamma}\left\{(1-\gamma)\,Q_{\mathrm{A0}}\left[1 + (1-\gamma)^{2k}\right] + Q_{\mathrm{B0}}\left[1 - (1-\gamma)^{2k}\right]\right\} + \frac{\gamma}{2-\gamma}Q_{\mathrm{A0}}.$$

Náboj koule B pak

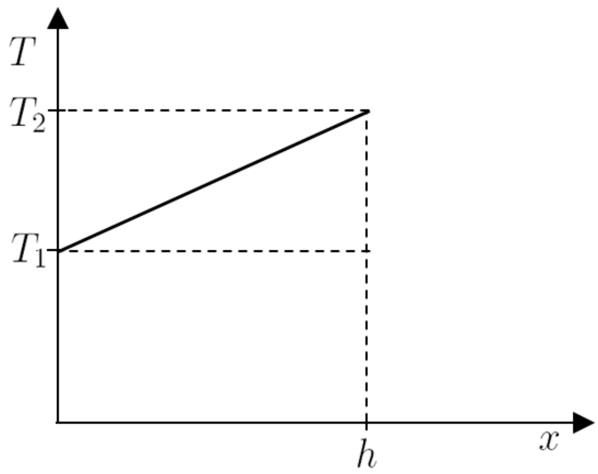
$$Q_{\mathrm{B}k} = Q_{\mathrm{A0}}+Q_{\mathrm{B0}}-\frac{1}{2-\gamma}\left\{(1-\gamma)\,Q_{\mathrm{A0}}\left[1+(1-\gamma)^{2k}\right]+Q_{\mathrm{B0}}\left[1-(1-\gamma)^{2k}\right]\right\}-\frac{\gamma}{2-\gamma}Q_{\mathrm{A0}} = \frac{1}{2-\gamma}\left\{(1-\gamma)\,Q_{\mathrm{A0}}\left[1-(1-\gamma)^{2k}\right]+Q_{\mathrm{B0}}\left[1+(1-\gamma)^{2k}\right]\right\}-\frac{\gamma}{2-\gamma}Q_{\mathrm{B0}}$$

Výsledky se neliší o více než 0,2 %.

4. a) Z předpokladu ustáleného tepelného toku $q = -\lambda\dfrac{\Delta T}{\Delta x} =$ konst. plyne

$$-\lambda\frac{T_2-T_1}{h} = -\lambda\frac{T-T_1}{x}.$$

Z rovnice dostaneme $T = \dfrac{T_2-T_1}{h}x + T_1$. Teplota uvnitř desky se tedy mění lineárně (viz obr. R5).



Obr. R4

1 bod

b) Hranol leží na ploše o velikosti S. Do ustavení tepelné rovnováhy, kdy teplota uvnitř hranolu ve směru dolů lineárně roste, přijme hranol teplo

$$Q = mc_l\frac{T_2-T_1}{2} = Sh\rho_l c_l\frac{T_2-T_1}{2}.$$

Toto teplo musí hranolu předat teplejší deska za dobu τ_0:

$$Q = \lambda_l S\frac{T_2-T_1}{h}\tau_0.$$

Pak

$$Sh\rho_l c_l\frac{T_2-T_1}{2} = \lambda_l S\frac{T_2-T_1}{h}\tau_0 \quad\Rightarrow\quad \tau_0 = \frac{\rho_l c_l h^2}{2\lambda_l} \cong 4\cdot 10^4\ \mathrm{s} = 11\ \mathrm{h}.$$

3 body

c) Při zamrzání ledu odebírá teplo vznikajícímu ledu vzduch nad jeho povrchem. Toto teplo dodává kapalná voda pod ledem. Za velmi krátkou dobu dτ vznikne vrstvička ledu o tloušťce dx. Přitom se skupenské teplo krystalizace musí rovnat odebranému teplu. Vzduch musí odebrat jednak teplo rovné skupenskému teplu tuhnutí a navíc teplo, potřebné k ustavení tepelné rovnováhy ve vznikající vrstvě ledu.

$$l_t\mathrm{d}m + xS\rho_l c_l \frac{t_0 - t_3}{2}\mathrm{d}x = l_t S\rho_l \mathrm{d}x + xS\rho_l c_l \frac{t_0 - t_3}{2}\mathrm{d}x = \lambda_l S\frac{t_0 - t_3}{x}\mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\tau = \frac{l_t \rho_l}{\lambda_l (t_0 - t_3)} x\mathrm{d}x + \frac{\rho_l c_l}{2\lambda_l} x\mathrm{d}x,$$

$$\tau_1 = \left(\frac{l_t \rho_l}{\lambda_l (t_0 - t_3)} + \frac{\rho_l c_l}{2\lambda_l}\right) \int_0^h x\mathrm{d}x = \frac{l_t \rho_l h^2}{2\lambda_l (t_0 - t_3)} + \frac{\rho_l c_l}{4\lambda_l} h^2 \cong 6{,}27 \cdot 10^5 \text{ s} = 7{,}3 \text{ dne.}$$

3 body

d) Při tání ledu je teplo potřebné k jeho tání přiváděno vrstvou vody, která vzniká na jeho povrchu. Zvolme osu x s počátkem v rovině hladiny v horní vrstvě vody ve směru dolů. Za nekonečně malou dobu $\mathrm{d}\tau$ přibude nad ledem voda nekonečně malé tloušťky $\mathrm{d}x$, přičemž platí rovnice tepelné rovnováhy

$$\lambda_0 \frac{t_4 - t_0}{x} S\mathrm{d}x = l_t S\rho_l \mathrm{d}x + S\rho_0 c_0 \frac{t_4 - t_0}{2}\mathrm{d}x$$

z níž plyne

$$\mathrm{d}\tau = \left(\frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2\lambda_0}\right) x\mathrm{d}x.$$

Integrací v mezích od nuly do konečné tloušťky vrstvy $h_0' = \frac{\rho_l}{\rho_0} h_0$ dostaneme

$$\tau_2 = \left(\frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2\lambda_0}\right) \int_0^{h_0'} x\mathrm{d}x = \left(\frac{l_t \rho_l}{\lambda_0 (t_4 - t_0)} + \frac{\rho_0 c_0}{2\lambda_0}\right) \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\rho_l}{\rho_0} h_0} =$$

$$= \frac{l_t \rho_l^3 h_0^2}{2\lambda_0 \rho_0^2 (t_4 - t_0)} + \frac{c_0 \rho_l^2 h_0^2}{4\lambda_0 \rho_0} = 1{,}84 \cdot 10^6 \text{ s} = 511 \text{ h} = 21 \text{ dní.}$$

3 body