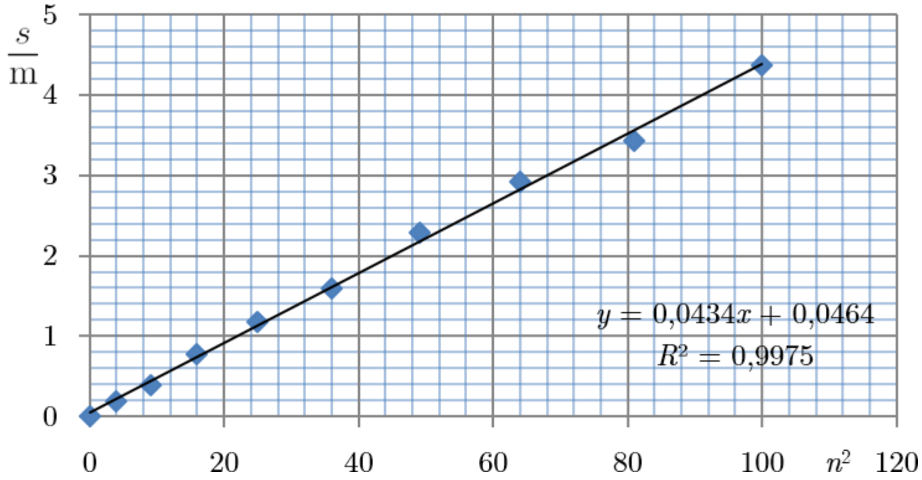
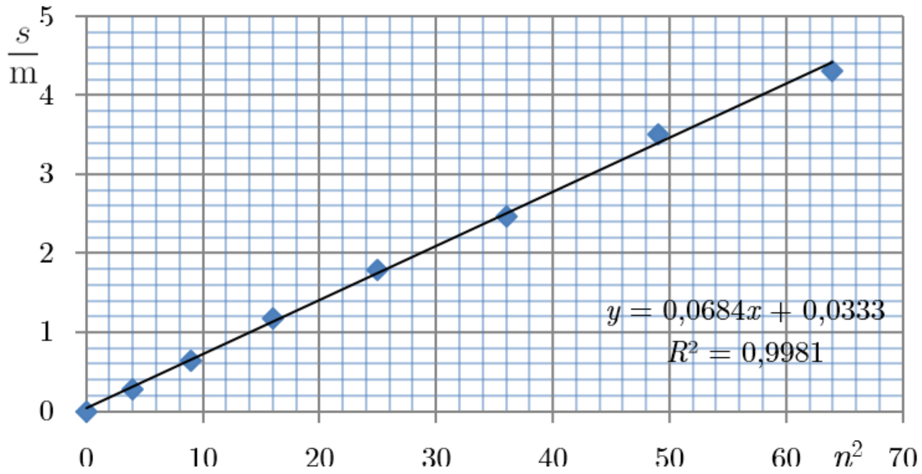
Řešení úloh 1. kola 59. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 4, 7), J. Jírů (5), P. Šedivý (6)

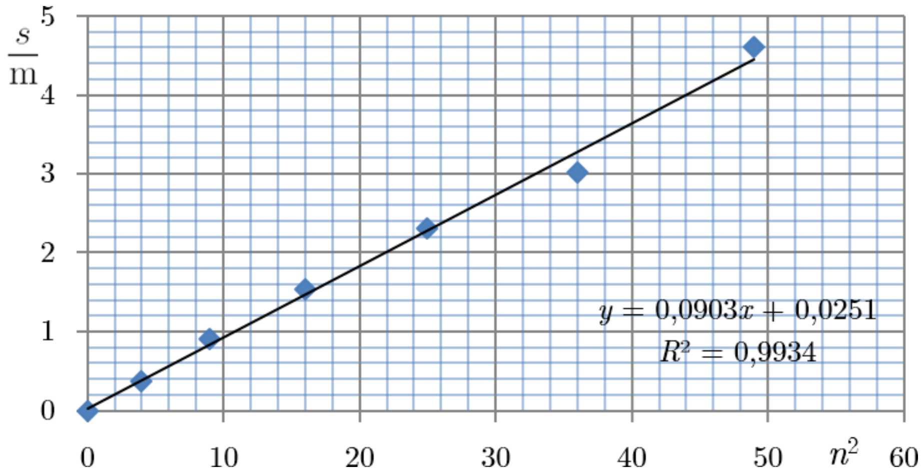
1.a) Je-li pohyb kuličky rovnoměrně zrychlený, bude pro uraženou dráhu platit vztah $s = \frac{1}{2}An^2$. Sestrojenými grafy proložíme v EXCELu spojnici trendu, závislost lineární a z rovnice regrese a z intervalu spolehlivosti vidíme, že tento vztah platí a že jde skutečně o přímou úměrnost.



Graf závislosti dráhy s na počtu kyvů n^2 pro $h = 0{,}2$ m



Graf závislosti dráhy s na počtu kyvů n^2 pro $h = 0{,}3$ m



Graf závislosti dráhy s na počtu kyvů n^2 pro $h = 0{,}4$ m

4 body

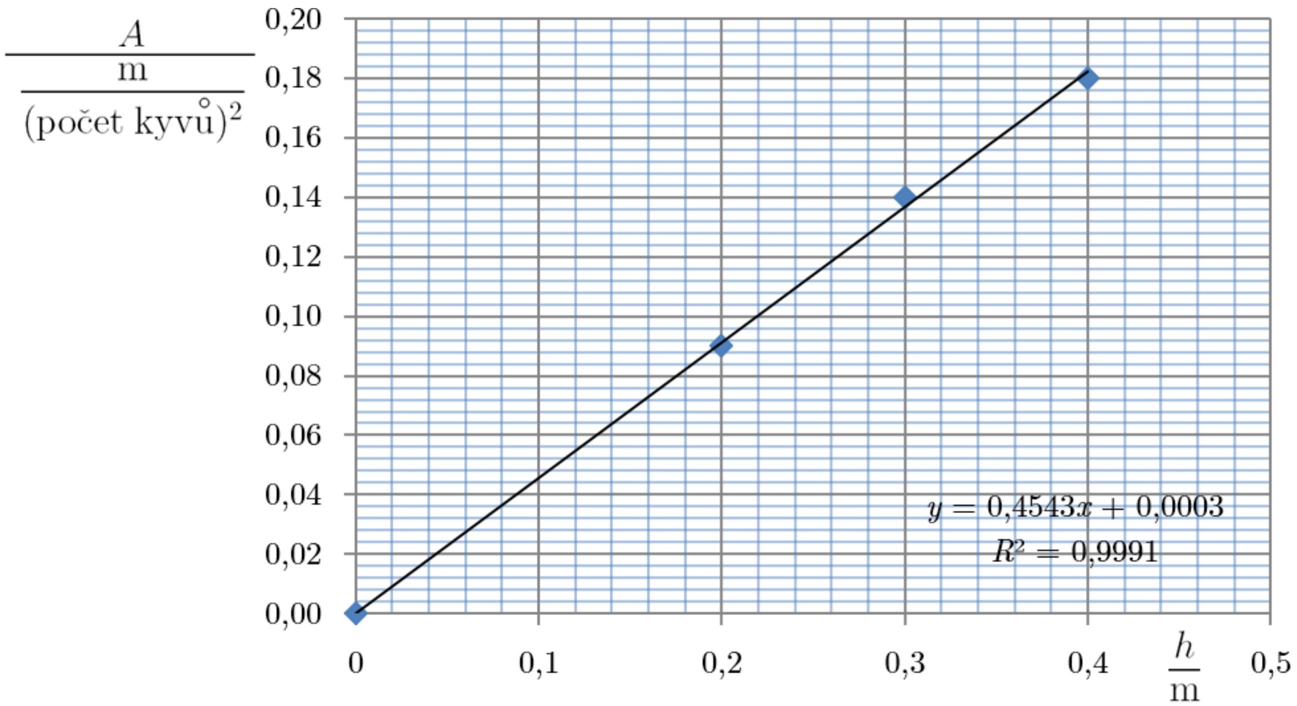
b) Zrychlení A odečteme přímo z rovnic regrese.

Pro $h = 0{,}20$ m je $A = \dfrac{0{,}09\ \text{m}}{(\text{počet kyvů})^2}$,

pro $h = 0{,}30$ m je $A = \dfrac{0{,}14\ \text{m}}{(\text{počet kyvů})^2}$,

pro $h = 0{,}40$ m je $A = \dfrac{0{,}18\ \text{m}}{(\text{počet kyvů})^2}$.

Z rovnice regrese vidíme, že závislost zrychlení A na výšce je lineární $A = kh$, kde konstanta úměrnosti $k = 0{,}45(\text{počet kyvů})^{-2}$. **2 body**



Graf závislosti zrychlení A na výšce h

c) Protože $A = kh$, pro $h = 0{,}50$ m tedy

$$A = 0{,}225\frac{m}{(\text{počet kyvů})^2} \quad \text{a} \quad s = \frac{1}{2}An^2 = 2{,}81\ \text{m}.$$ **1 bod**

d) Vztah pro velikost zrychlení na nakloněné rovině odvodíme ze zákona zachování energie.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2.$$

Označíme-li α úhel, který svírá nakloněná rovina s vodorovným směrem, potom $h = L\sin\alpha$ a tedy $gL\sin\alpha = \dfrac{7}{10}v^2$. Po dosazení za L a v:

$$g\frac{1}{2}at^2\sin\alpha = \frac{7}{10}a^2t^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{7}g\sin\alpha.$$

V našich podmínkách, kde čas nahrazuje počet kyvů kyvadélka,

$$A = \frac{5}{7}g^*\sin\alpha = \frac{5}{7}g^*\frac{h}{L} \quad \Rightarrow \quad g^* = \frac{7AL}{5h} = 3{,}15\frac{m}{(\text{počet kyvů})^2}.$$

Z doby kyvu matematického kyvadla $n = \pi\sqrt{\frac{l}{g^*}}$ vyjádříme délku kyvadélka

$$l = \frac{n^2 g^*}{\pi^2} = \frac{1 \cdot 3{,}15}{\pi^2} = 0{,}32\ \mathrm{m}.$$

3 body

2.a) Na cívku působí tři síly: tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ v těžišti, které leží v ose cívky, tahová síla lanka $\boldsymbol{T}$ o velikosti $T = 2mg$ a reakce kolejnic $\boldsymbol{R}$, jejíž složky působí v bodech dotyku cívky s kolejnicemi. Protože se cívka pohybuje stálou rychlostí, jsou tyto síly i jejich momenty v rovnováze. Podle momentové věty vzhledem k ose procházející body dotyku cívky s kolejnicemi platí:

$$mgR\sin\alpha = 2mg(R\cos\alpha - r) \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{2} \doteq 0{,}62.$$

4 body

b) Pohyb konce lanka vzniká složením pohybu cívky a pohybu lanka vzhledem k cívce (obr. R1). Velikost rychlosti $\boldsymbol{v}_1$, se kterou se lanko namotává na válec cívky, je $v_1 = v_0\frac{r}{R}$. Velikost výsledné rychlosti bodu A určíme užitím kosinové věty:

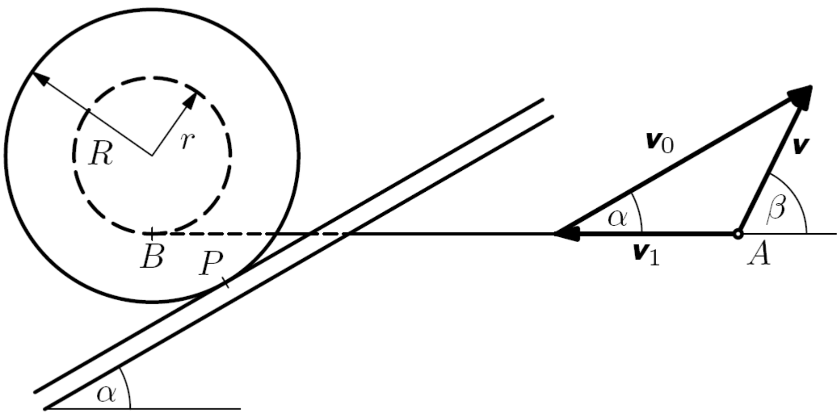
$$v = \sqrt{v_0^2 + v_0^2\frac{r^2}{R^2} - 2v_0^2\frac{r}{R}\cos\alpha} = v_0\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R}\cos\alpha} \doteq 0{,}10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4 body

Směrový úhel β výsledné rychlosti $\boldsymbol{v}$ určíme pomocí sinové věty:

$$\frac{\sin(180^\circ - \beta)}{v_0} = \frac{\sin\alpha}{v} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{v_0\sin\alpha}{v} \quad \Rightarrow \quad \beta \doteq 64^\circ.$$

2 body



Obr. R1

3.a) Velikost w rychlosti vozíku bude největší v okamžiku, kdy je těžiště sloupce rtuti nejníže, tedy polovina objemu rtuti je v levém a polovina v pravém rameni. Podle zákona zachování energie se úbytek potenciální energie rtuti $-\Delta E_\mathrm{p}$ musí rovnat součtu kinetické energie rtuti E_k1 a kinetické energie vozíku s trubicemi E_k2.

Platí

$$-\Delta E_{\mathrm{p}} = mg\frac{l}{4}\cos\alpha = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mw^2, \tag{1}$$

kde v je velikost rychlosti rtuti vzhledem k podložce. Pohyb rtuti můžeme popsat jako pohyb složený. Označíme-li u velikost rychlosti rtuti vzhledem k trubici, v_{v} vodorovnou složku a v_{s} svislou složku rychlosti rtuti vzhledem k podložce, pak

$$v_{\mathrm{v}} = u\sin\alpha - w, \qquad v_{\mathrm{s}} = u\cos\alpha, \qquad E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}m(v_{\mathrm{v}}^2 + v_{\mathrm{s}}^2). \tag{2}$$

Podle zákona zachování hybnosti

$$mv_{\mathrm{v}} = m(u\sin\alpha - w) = Mw \quad \Rightarrow \quad u = \frac{w}{\sin\alpha}\left(1 + \frac{M}{m}\right). \tag{3}$$

Z rovnic (1) až (3) dostaneme

$$mg\frac{l}{4}\cos\alpha = \frac{Mw^2}{2} + \frac{mw^2}{2}\left[\frac{M^2}{m^2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2\right],$$

$$w = \sqrt{\frac{mgl\cos\alpha}{2\left[M + \dfrac{M^2}{m} + \dfrac{m}{\operatorname{tg}^2\alpha}\left(1 + \dfrac{M}{m}\right)^2\right]}}. \tag{4}$$

Číselně: $w = 0{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

5 bodů

b) Těžiště soustavy rtuť – vozík je na počátku ve vzdálenosti

$$x_T = \frac{M\cdot 0 + m\dfrac{l}{2}\sin\alpha}{m + M} = \frac{ml\sin\alpha}{2(M + m)}$$

od středu vozíku. Protože se poloha těžiště během děje nemění, ujede vozík do prvního zastavení dvojnásobnou vzdálenost

$$s = 2x_T = \frac{ml\sin\alpha}{M + m}.$$

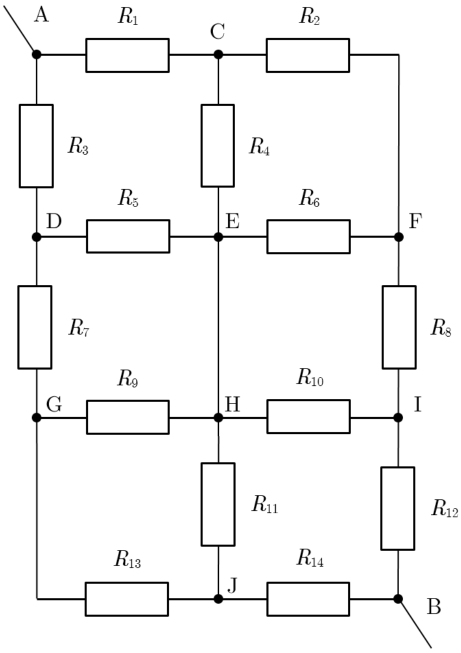
Číselně $s = 3{,}7\ \mathrm{cm}$. **3 body**

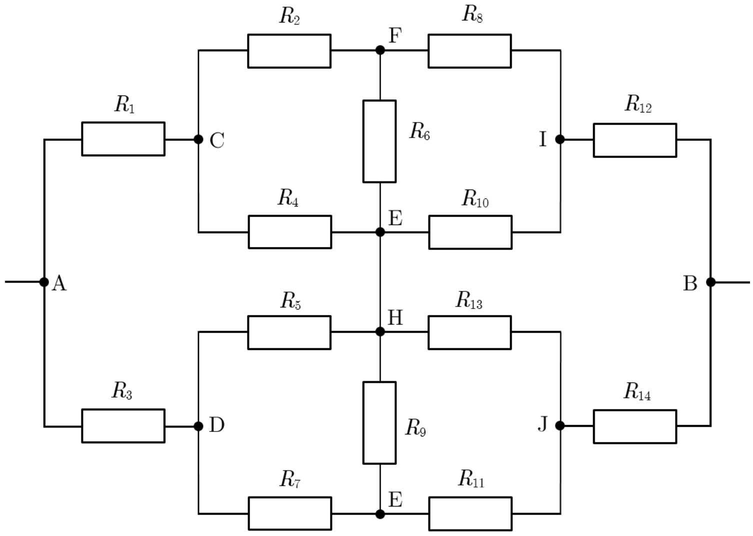
Během pohybu dochází k přeměně potenciální energie na kinetickou a naopak. Soustava se chová jako harmonický oscilátor s amplitudou výchylky x_T a s amplitudou rychlosti w. Platí $w = \omega x_T = \dfrac{2\pi}{T}x_T$. Do prvního zastavení vozíku uplyne polovina doby kmitu:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi x_T}{w} = \frac{\pi ml\sin\alpha}{2(m + M)w},$$

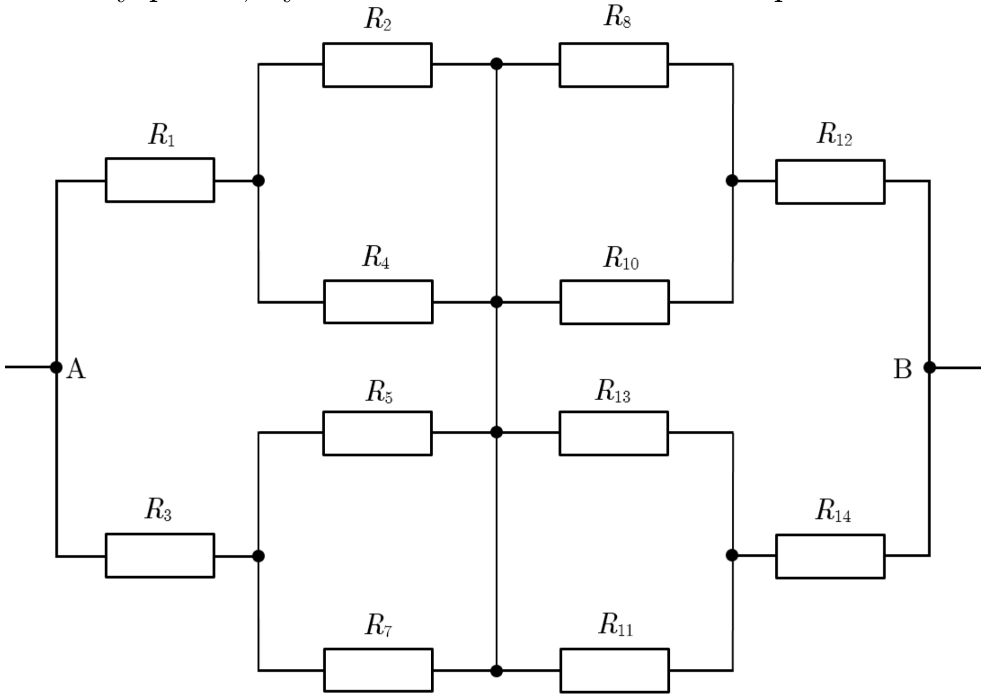
kde w je dáno vztahem (4). Číselně $t = 0{,}35\ \mathrm{s}$. **2 body**

4.a) Označíme uzly a překreslíme obrázek:





Protože jde o symetrický obvod, můžeme odpory R_6 a R_9, kterými nebude procházet žádný proud, vynechat. Nové schéma obvodu pak bude:



Nyní už snadno spočítáme celkový odpor: $R_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}R = 150\ \Omega$. **6 bodů**

b) Celkový proud $I = \dfrac{2U_e}{3R} = \dfrac{1}{6}$ A. Proudy $I_1 = I_3 = I_{12} = I_{14} = \dfrac{1}{12}$ A, proudy $I_2 = I_4 = I_5 = I_7 = I_8 = I_{10} = I_{13} = I_{11} = \dfrac{1}{24}$ A a proudy $I_6 = I_9 = 0$ A.

Příslušná napětí pak $U_1 = U_3 = U_{12} = U_{14} = \dfrac{25}{3}$ V,

$U_2 = U_4 = U_5 = U_7 = U_8 = U_{10} = U_{13} = U_{11} = \dfrac{25}{6}$ V. **4 body**

5.a) Žárovka má elektrický odpor $$R = \frac{U_0^2}{P_0} \qquad (1)$$

a v obou zapojeních jí protéká jmenovitý proud
$$I_0 = \frac{P_0}{U_0}. \qquad (2)$$

Impedance obvodu je
$$Z_1 = \frac{U_1}{I_0} = \frac{U_1 U_0}{P_0}.$$

Užitím vztahů (1) a (2) dostaneme pro induktanci cívky
$$X_L = \sqrt{Z_1^2 - R^2} = \frac{U_0\sqrt{U_1^2 - U_0^2}}{P_0}. \qquad (3)$$

Indukčnost cívky pak je
$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{U_0\sqrt{U_1^2 - U_0^2}}{2\pi f P_0} = 0{,}28\ \mathrm{H}.$$

3 body

b) Pro impedanci obvodu po připojení kondenzátoru platí
$$Z_2 = \frac{U_2}{I_0} = \frac{U_2 U_0}{P_0}, \qquad (4)$$
$$Z_2 = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Z rovnice plynou dvě řešení
$$X_C = X_L \pm \sqrt{Z_2^2 - R^2}.$$

Užitím rovnic (3), (4) a (1) dostaneme
$$X_C = \frac{U_0\sqrt{U_1^2 - U_0^2}}{P_0} \pm \sqrt{\frac{U_2^2 U_0^2}{P_0^2} - \frac{U_0^4}{P_0^2}} = \frac{U_0}{P_0}\left(\sqrt{U_1^2 - U_0^2} \pm \sqrt{U_2^2 - U_0^2}\right).$$

Kapacita kondenzátoru pak je
$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{P_0}{2\pi f U_0\left(\sqrt{U_1^2 - U_0^2} \pm \sqrt{U_2^2 - U_0^2}\right)}.$$

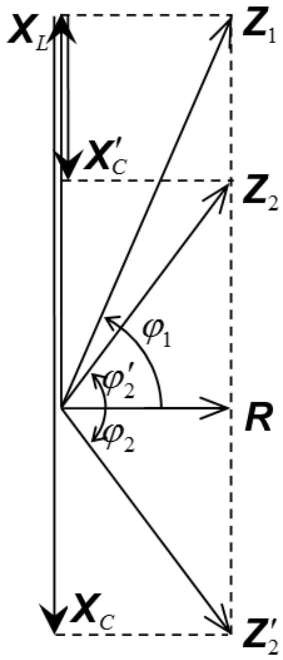
Číselně dostaneme možné kapacity $C = 23\ \mu\mathrm{F}$ a $C = 87\ \mu\mathrm{F}$. **3 body**

c) V zapojení s cívkou je
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{X_L}{R} = \frac{\sqrt{U_1^2 - U_0^2}}{U_0} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 66^\circ.$$

V zapojení s cívkou a s kondenzátorem je
$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{X_L - X_C}{R} = \mp\frac{\sqrt{U_2^2 - U_0^2}}{U_0} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = -53^\circ, \varphi_2' = 53^\circ.$$

2 body

d) K sestrojení dopočteme rezistenci $R = 38\ \Omega$, induktanci $X_L = 88\ \Omega$ a kapacitanci $X_C = 139\ \Omega$, $X_C' = 37\ \Omega$.



2 body

7.a) Nejprve určíme moment setrvačnosti tyče se závažím vzhledem k ose:

$$J = ml^2 + \frac{1}{3}ml^2 = \frac{4}{3}ml^2.$$

Těžiště tyče se závažím je ve vzdálenosti $\frac{3}{4}l$ od osy otáčení. Podle ZZE

$$2mg\left(\frac{3}{4}l\cos\alpha + \frac{3}{4}l\right) = \frac{1}{2}J\omega^2,$$

$$\frac{3}{2}mgl\left(1+\cos\alpha\right) = \frac{2}{3}ml^2\omega^2,$$

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g\left(1+\cos\alpha\right)}{l}}.$$

3 body

b) Direkční moment $D = 2mg\frac{3}{4}l$, doba kmitu fyzického kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{3}l}{\frac{3}{2}g}} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

2 body

c) Těžiště tyče se dvěma závažími je ve vzdálenosti $x_T = \dfrac{2m\frac{l}{2} + ml}{3m} = \dfrac{2}{3}l$, moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení

$$J_1 = ml^2 + \frac{1}{3}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{19}{12}ml^2.$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$3mg\left(\frac{2}{3}l\cos\alpha+\frac{2}{3}l\right)=\frac{1}{2}J\omega_1^2,$$

$$2mgl\left(1+\cos\alpha\right)=\frac{19}{24}ml^2\omega_1^2,$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{48}{19}}\sqrt{\frac{g\left(1+\cos\alpha\right)}{l}})=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{48}{19}}\omega=1{,}06\omega$$

Úhlová rychlost se zvětší 1,06-krát.

Direkční moment $D_1=3mg\frac{2}{3}l=2mgl$, doba kmitu fyzického kyvadla

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{J_1}{D_1}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{19}{12}l}{2g}}=\pi\sqrt{\frac{19l}{6g}}.$$

Doba kmitu bude menší $\dfrac{T_1}{T}=\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{19}{12}}=0{,}94$-krát. **5 bodů**