Řešení úloh krajského kola 59. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Úlohy navrhli J. Jírů (1) a J. Thomas (2, 3, 4)

1. a) Příkon topné spirály se sepnutým spínačem (kondenzátor zkratován) je

$$P_1 = \frac{U^2}{R}.$$

Příkon spirály s rozepnutým spínačem je

$$P_2 = RI^2 = R\frac{U^2}{Z^2} = R\frac{U^2}{R^2 + X_C^2}.$$

2 body

Poměr příkonů je

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R^2 + X_C^2}{R^2} > 1. \tag{1}$$

První část grafu s rychlejším růstem teploty tak odpovídá příkonu P_1 (sepnutý spínač), druhá část grafu příkonu P_2 (rozepnutý spínač).

Označíme-li C tepelnou kapacitu vody v nádobě, t teplotu vody a τ čas, lze poměr příkonů vyjádřit jako poměr časových změn teploty, které poté vyčteme z grafu:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\dfrac{C\Delta t_1}{\Delta\tau_1}}{\dfrac{C\Delta t_2}{\Delta\tau_2}} = \frac{\dfrac{\Delta t_1}{\Delta\tau_1}}{\dfrac{\Delta t_2}{\Delta\tau_2}} = \frac{\dfrac{4}{5}}{\dfrac{7-4}{14-5}} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

2 body

Dosazením do vztahu (1) dostaneme $X_C = \sqrt{1{,}4}R$. Užitím rovnice $X_C = \dfrac{1}{2\pi fC}$ pak dostaneme kapacitu kondenzátoru

$$C = \frac{1}{2\pi\sqrt{1,4}fR} = 60\ \mu\text{F}.$$

2 body

b) Fázové posunutí je $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-X_C}{R} = -\sqrt{1{,}4}$, $\varphi = -50°$. Proud fázově předbíhá napětí o 50°.

2 body

c) Vyjdeme z rovnice $P_1 = 2{,}4P_2$, kde $P_1 = \dfrac{U^2}{R}$, $P_2 = \dfrac{U_R^2}{R}$. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$U_R = \frac{U}{\sqrt{2,4}} = 0{,}65U.$$

2 body

2. a), b) Řešení úlohy závisí na tom, jestli sáňky najedou na asfalt jen částečně nebo úplně. Při najíždění sáněk na asfalt působí proti jejich pohybu síla, jejíž složka do směru pohybu je úměrná ujeté vzdálenosti x (x je menší nebo rovno l):

$$F = -m\frac{x}{l}fg = -kx.$$

Pohyb sáněk můžeme považovat za pohyb harmonického oscilátoru s tuhostí k po čtvrtinu jeho periody; doba do zastavení tedy bude

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{fg}} = 0{,}87\ \mathrm{s}, \qquad \textbf{3 body}$$

přitom sáňky ujedou vzdálenost rovnou amplitudě oscilátoru

$$s = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = v_0\sqrt{\frac{l}{fg}}. \qquad \textbf{2 body}$$

V případě a) $s = 1{,}1\ \mathrm{m}\ < l$, v případě b) ale $s = 2{,}8\ \mathrm{m}\ > l$. V tomto případě musíme zvolit jiný postup řešení, protože budou-li sáňky na asfaltu celou svojí délkou, bude velikost síly tření již stálá.

Uraženou dráhu můžeme určit ze zákona zachování energie. Kinetická energie sáněk je rovna práci třecích sil. V první části velikost odporové síly lineárně roste od 0 do fmg, v druhé části dráhy je stálá:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = fmg\frac{l}{2} + fmg(s-l) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v_0^2 + fgl}{2fg} = 3{,}8\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{2 body}$$

Doba najíždění sáněk na asfalt bude v tomto případě složena z času t_1' (celé sáňky dojedou na asfalt) a z doby t_2 do jejich úplného zastavení. V okamžiku, kdy se právě celé sáňky ocitnou na asfaltu, budou mít rychlost v_1, kterou určíme ze zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = fmg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - fgl}.$$

Tento pohyb trval po dobu t_1', kterou určíme ze vztahu pro rychlost harmonického oscilátoru

$$v_1 = v_0\cos\omega t_1' = v_0\cos\sqrt{\frac{fg}{l}}t_1' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t_1' = \frac{\arccos\dfrac{v_1}{v_0}}{\sqrt{\dfrac{fg}{l}}} = \sqrt{\frac{l}{fg}}\arccos\frac{\sqrt{v_0^2 - fgl}}{v_0} = 0{,}25\ \mathrm{s}.$$

Další pohyb sáněk je rovnoměrně zpomalený se zrychlením $a = fg$ a doba do zastavení bude

$$t_2 = \frac{v_1}{a} = \frac{\sqrt{v_0^2 - fgl}}{fg};$$

celková doba do zastavení pak

$$t = t_1' + t_2 = \sqrt{\frac{l}{fg}} \arccos \frac{\sqrt{v_0^2 - fgl}}{v_0} + \frac{\sqrt{v_0^2 - fgl}}{fg} = 1{,}4 \text{ s.} \qquad \textbf{3 body}$$

3. a) Z rovnosti kapilárního a hydrostatického tlaku $\frac{4\sigma}{d_1} = h_1 \rho g$ plyne

$$h_1 = \frac{4\sigma}{d_1 \rho g} = 3 \text{ m.}$$

Z rovnosti kapilárního a hydrostatického tlaku $\frac{4\sigma}{d_2} = h_2 \rho g$ plyne

$$d_2 = \frac{4\sigma}{h_2 \rho g} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

Pro dopravení živin do koruny vysokého stromu kapilární tlak nestačí.

3 body

b) Nejprve určíme molární koncentraci soli v roztoku:

$$c = \frac{n}{V} = \frac{m}{V\left(M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Na}\right) + M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Cl}\right)\right)}.$$

Osmotický tlak potom bude

$$p_{osm} = iRTc = iRT \frac{m}{V\left(M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Na}\right) + M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Cl}\right)\right)} = 0{,}85 \text{ MPa.}$$

Velikost osmotického tlaku vysvětluje, proč dokáží některé rostliny prorůst i vrstvou asfaltu.

Z rovnosti osmotického a hydrostatického tlaku

$$h\rho g = iRT \frac{m}{V\left(M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Na}\right) + M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Cl}\right)\right)}$$

pak plyne

$$h = iRT \frac{m}{V\rho g\left(M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Na}\right) + M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Cl}\right)\right)} = 87 \text{ m.} \qquad \textbf{4 body}$$

c) Molární koncentrace

$$c = \frac{p_{osm}}{iRT} = \frac{m}{V\left(M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Na}\right) + M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Cl}\right)\right)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{V} = \frac{p_{osm}}{iRT}\left(M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Na}\right) + M_\mathrm{m}\left(\mathrm{Cl}\right)\right) = 8{,}2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

V 1 kg roztoku je 8,2 g soli, roztok je tedy přibližně 0,8%. **3 body**

4. a) Označme S vnitřní průřez trubice, ρ_1 hustotu rtuti a y výchylku z rovnovážné polohy. Na hladinu kapaliny působí ve svislém směru síla o velikosti

$$F = m_1 g = V\rho_1 g = 2S\left|y\right|\rho_1 g.$$

Podle 2. pohybového zákona

$$m_1 a = -m_1 \omega^2 y = -2\rho_1 g S y.$$

Odtud pro periodu malých kmitů dostaneme

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{2\rho_1 S g}}. \tag{1}$$

4 body

Vztah lze odvodit také ze zákona zachování energie:
Potenciální energie při výchylce y hladiny rtuti z rovnovážné polohy je

$$E_p = \Delta m g|y| = S\rho_1 g y^2.$$

Zákon zachování energie pro pohyb rtuti (pokládáme-li rtuť za ideální tekutinu) pak lze psát ve tvaru

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 + \mathrm{S}\rho_1 g y^2 = \text{konst.}$$

Porovnání s obdobnou rovnicí popisující harmonické kmity hmotného bodu s hmotností m pod vlivem síly o složce $F_y = -ky$ vede ke vztahům $k = 2S\rho_1 g$ a

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{2\rho_1 S g}}.$$

b) Přidáme-li do jednoho ramena vodu, změní se hmotnost soustavy. Protože voda nepřesahuje do druhého ramena, je síla vracející kapaliny do rovnovážné polohy daná pouze přetékáním rtuti z jednoho ramena do druhého. Proto se jmenovatel zlomku nezmění a pro periodu kmitů bude platit

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2\rho_1 S g}}. \tag{2}$$

Dělením vztahů (1) a (2)

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1},$$

po úpravě

$$m_2 = m_1 \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2}.$$

3 body

Přidáme-li do druhého ramena líh, opět se změní hmotnost soustavy, ale jmenovatel zlomku se nezmění. Pak

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{2\rho_1 S g}}. \tag{3}$$

Dělením vztahů (3) a (1)

$$\frac{T_3^2}{T_1^2} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1}.$$

Po dosazení za m_2 a následné úpravě dostáváme

$$m_3 = m_1 \frac{T_3^2 - T_2^2}{T_1^2}.$$

3 body