Řešení úloh krajského kola 59. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Úlohy navrhli J. Thomas (1, 2, 4) a J. Jírů (3)

1. a), b) Z hlediska soustavy pevně spojené s prvním vlakem se druhý vlak pohybuje rovnoměrným pohybem rychlostí o velikosti $v_1 + v_2$ po dráze $2L$. Hledaná doba je

$$t = \frac{2L}{v_1 + v_2} = 8{,}6 \text{ s.}$$

2 body

Během míjení ujede první vlak dráhu

$$L + l = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

druhý vlak dráhu

$$L - l = v_2 t - \frac{1}{2} a t^2.$$

Rozdíl dráhy prvního a dráhy druhého vlaku je

$$2l = (v_1 - v_2)\, t + a t^2 = (v_1 - v_2) \frac{2L}{v_1 + v_2} + a \frac{4L^2}{(v_1 + v_2)^2}.$$

Odstraněním zlomků dostaneme

$$l (v_1 + v_2)^2 = L \left(v_1^2 - v_2^2\right) + 2L^2 a.$$

Z rovnice plyne

$$a = \frac{l (v_1 + v_2)^2 - L \left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2L^2} = 0{,}097 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

4 body

c) Pro rychlosti vlaků v okamžiku, kdy se míjí jejich koncová světla platí

$$v_1' = v_1 + a \cdot t = \frac{v_1 l + v_2 (L + l)}{L} = 20{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$ **2 body**

$$v_2' = v_2 - a \cdot t = \frac{v_1 (L - l) - v_2 l}{L} = 14{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$ **2 body**

2. a) Podle Archimédova zákona je hmotnost lodi rovna hmotnosti vytlačené vody. V mořské vodě tedy

$$V = \frac{m}{\rho_v} = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ m}^3.$$ **2 body**

b) Klesne-li vztlaková síla na polovinu

$$\rho_v V_v g + \rho_{m0} V_{m0} g = 0{,}5 m g$$

a také

$$V_v + V_{m0} = V \quad \Rightarrow \quad V_v = V - V_{m0}.$$

Po dosazení

$$\rho_v\left(V - V_{m0}\right) + \rho_{m0}V_{m0} = 0{,}5m$$

a po úpravě

$$V_{m0} = \frac{0,5m}{\rho_v - \rho_{m0}} = 7{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{m}^3,$$

Podíl $\dfrac{V_{m0}}{V} = \dfrac{0{,}5\rho_v}{\rho_v - \rho_{m0}} = 0{,}50$; voda tedy obsahuje 50 objemových procent metanu.

4 body

c) Podle stavové rovnice

$$\frac{p_0V_{m0}}{T_0} = \frac{\left(p_0 + h\rho_v g\right)V_m}{T_1},$$

$$V_m = \frac{p_0V_{m0}T_1}{\left(p_0 + h\rho_v g\right)T_0} = \frac{0,5mp_0T_1}{\left(\rho_v - \rho_{m0}\right)\left(p_0 + h\rho_v g\right)T_0} = 12\ \mathrm{m}^3.$$

3 body

d) Vzhledem k tomu, že hustota plynů je v porovnání s hustotou vody zanedbatelná, na druhu plynu nezáleží. Vzhledem k velikosti hydrostatického tlaku to však musí být plyn s dostatečně nízkou kritickou teplotou. Nemůže tedy jít například o oxid uhličitý.

1 bod

3. a) Označme $\Delta\tau$ jednotkový časový interval a Δt jednotkový teplotní interval. Pak pro stálý tepelný výkon přijímaný vodou v první a druhé fázi ohřevu platí

$$P = \frac{m_1 c \cdot 5\Delta t}{3\Delta\tau} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)c \cdot 4\Delta t}{7\Delta\tau}.$$

2 body

Úpravou dostaneme poměr

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{35}{12},$$

z něhož plyne

$$m_2 = \frac{23}{12}m_1.$$

2 body

b) Z grafu plyne, že teplota vody v konvici bezprostředně před dolitím je

$$t_1 = t_{\min} + \frac{5}{6}(t_{\max} - t_{\min}) = 66\ ^\circ\mathrm{C}.$$

a teplota vody v konvici bezprostředně po dolití

$$t_2 = t_{\min} + \frac{2}{6}(t_{\max} - t_{\min}) = 39\ ^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

Tepelnou výměnu během smíchání teplejší vody s přilitou chladnější vodou popisuje kalorimetrická rovnice

$$m_1 c \left(t_1 - t_2\right) = m_2 c \left(t_2 - t_0\right),$$

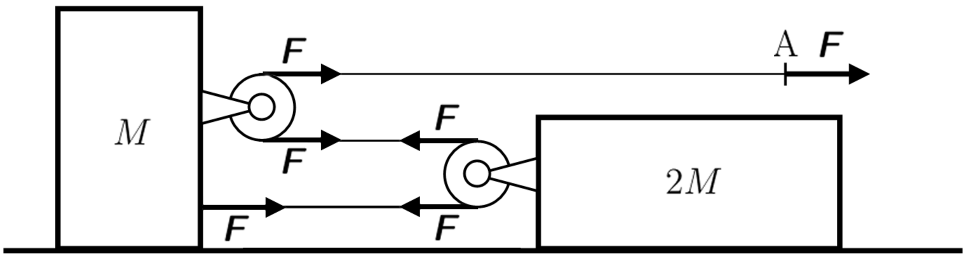
z níž plyne

$$t_0 = \frac{m_1 t_2 + m_2 t_2 - m_1 t_1}{m_2} = t_2 - \frac{m_1}{m_2}\left(t_1 - t_2\right) = 25\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

4 body

4. a) Protože kladky i nit mají zanedbatelnou hmotnost, působí na levé těleso síla o velikosti $3F$, na pravé těleso síla o velikosti $2F$ (obr. R1).

2 body

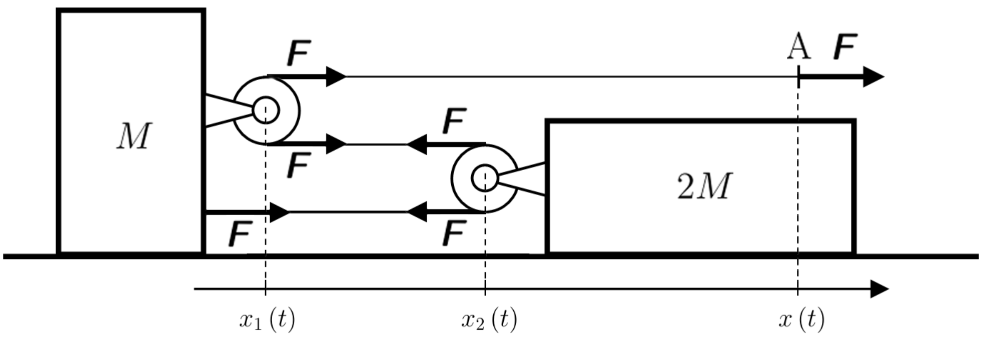


Obr. R1

b) Zrychlení levého tělesa má směr doprava a velikost $a_1 = \dfrac{3F}{M}$, zrychlení pravého tělesa má směr doleva a velikost $a_2 = \dfrac{2F}{2M} = \dfrac{F}{M}$.

2 body

c) Označme si souřadnici osy levé kladky v určitý čas t jako $x_1(t)$, souřadnici osy pravé kladky $x_2(t)$ a souřadnici konce niti $x_3(t)$. Označme si délku niti l, poloměry kladek r a vzdálenost osy levé kladky od levého tělesa jako x_0.



Obr. R2

Protože nit je neroztažitelná, můžeme její délku vyjádřit jako

$$l = x(t) - x_1(t) + \pi r + \pi r + x_2(t) - x_1(t) + x_2(t) - x_1(t) + x_0.$$

Odtud

$$x\left(t\right) = 3x_1\left(t\right) - 2x_2\left(t\right) + l - 2\pi r - x_0. \qquad (1)$$

Stejný vztah bude platit i v blízkém čase $t + \Delta t$,

$$x\left(t+\Delta t\right) = 3x_1\left(t+\Delta t\right) - 2x_2\left(t+\Delta t\right) + l - 2\pi r - x_0. \tag{2}$$

Odečtením rovnic (2) a (1) dostaneme vztah mezi posunutími těles Δx_1 a Δx_2 a posunutím konce niti Δx:

$$\Delta x = 3\Delta x_1 - 2\Delta x_2.$$

Dělením tohoto vztahu časovým intervalem Δt dostaneme vztah mezi okamžitými velikostmi rychlostí těles a rychlostí konce niti:

$$v = 3v_1 + 2v_2.$$

Analogicky dostaneme vztah mezi velikostmi zrychlení

$$a = 3a_1 + 2a_2.$$

Bod A na konci niti se tedy bude pohybovat se zrychlením

$$a = 3a_1 + 2a_2 = 3\frac{3F}{M} + 2\frac{F}{M} = \frac{11F}{M}.$$

6 bodů

Řešení užitím zákona zachování energie:
Za čas t vykoná síla o velikosti F působící za konec lana po dráze Δx práci, která je rovna výsledné kinetické energii soustavy:

$$F\Delta x = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}2Mv_2^2.$$

Pohyb konce lana a pohyb jednotlivých kvádrů je rovnoměrně zrychlený s příslušnými zrychleními:

$$F \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}Ma_1^2t^2 + Ma_2^2t^2.$$

S využitím výsledku b) dostaneme

$$F \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}M\left(\frac{3F}{M}\right)^2 + M\left(\frac{F}{M}\right)^2.$$

Z rovnice plyne

$$a = 11\frac{F}{M}.$$