Řešení úloh krajského kola 59. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů

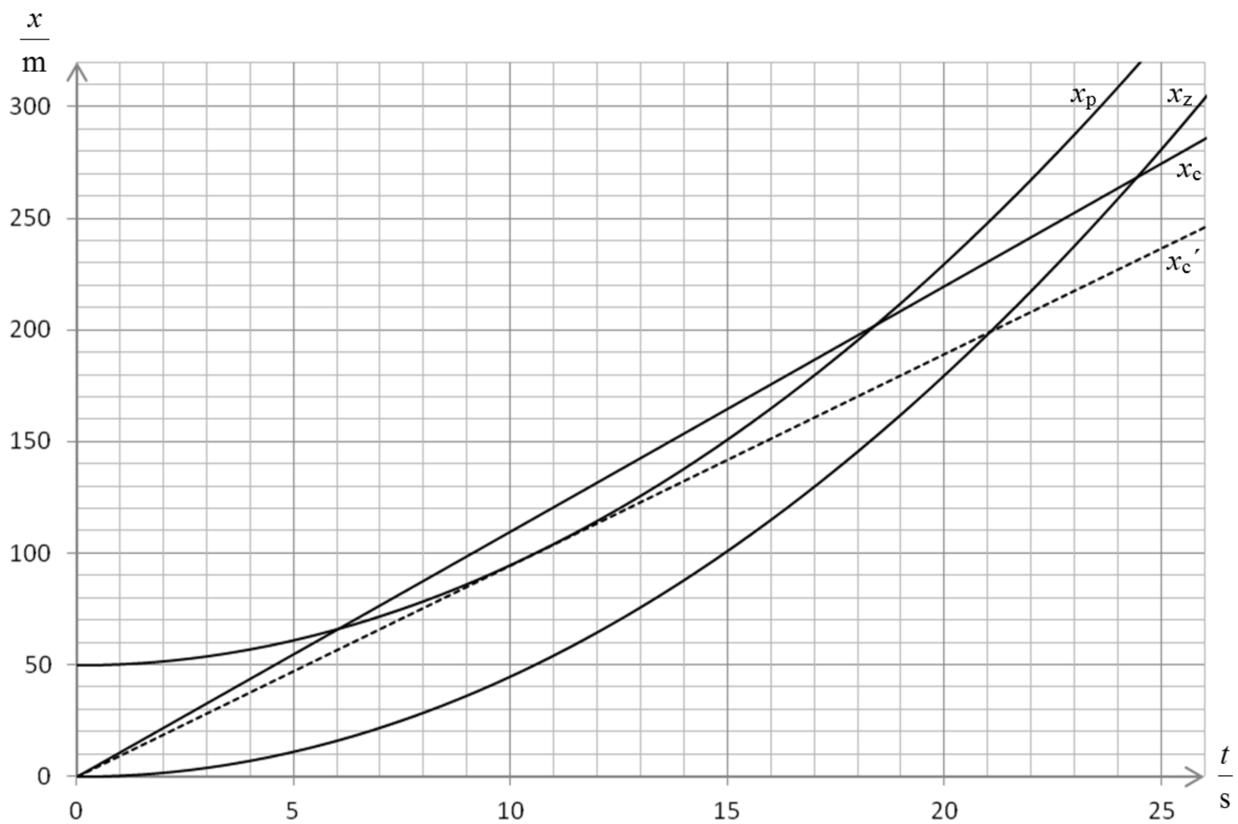
1.a) Sestavíme tabulku pro sestrojení grafů pro zadní a přední konec vlaku. Souřadnice vypočteme podle vzorců $x_\mathrm{z} = \frac{1}{2}at^2$, $x_\mathrm{p} = x_\mathrm{z} + d$.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$\frac{x_\mathrm{z}}{\mathrm{m}}$	0	1,8	7,2	16,2	28,8	45,0	64,8	88,2	115	146	180	218	259	304
$\frac{x_\mathrm{p}}{\mathrm{m}}$	50	51,8	57,2	66,2	78,8	95,0	115	138	165	196	230	268	309	354

3 body

Obě závislosti jsou kvadratické, grafy tvoří shodné paraboly vzájemně posunuté po svislé ose. Závislostí polohy cyklisty na čase je přímá úměrnost, grafem je přímka.

Sestrojení grafů:



Obr. R1

3 body

b) Cyklista jede vedle vlaku, pokud jeho poloha splňuje podmínku $x_\mathrm{z} \le x_\mathrm{c} \le x_\mathrm{p}$. Z grafu vyčteme, že podmínka je splněna pro $t \in \langle 0\ \mathrm{s}; 6{,}0\ \mathrm{s}\rangle \cup \langle 18{,}4\ \mathrm{s}; 24{,}4\ \mathrm{s}\rangle$. Z toho plyne, že doba Δt pohybu cyklisty vedle vlaku je přibližně 12 s.

2 body

c) Počátkem vedeme tečnu k horní parabole (závislost x'_c) a z grafu vyčteme, že např. v čase $t = 25$ s je souřadnice polohy cyklisty $x_\mathrm{c} = 237$ m. Velikost rychlosti pak určuje směrnice této tečny:

$$v_\mathrm{m} = \frac{x_\mathrm{c}}{t} = \frac{237}{25}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 9{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

Poznámka: Kontrolní výpočet na 4 platné číslice dává výsledek b) $\Delta t = 12{,}07$ s, c) $v_\mathrm{m} = 9{,}480\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2.a) Během brzdění ujede traktor dráhu

$$s = 3 \cdot 2\pi r = 6\pi \cdot \frac{2}{3} R = 4\pi R.$$

Ze vzorce pro brzdnou dráhu $s = \frac{1}{2}at^2$ dostaneme velikost zrychlení

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{8\pi R}{t^2}.$$

Brzdění způsobuje třecí síla o velikosti $F_\mathrm{t} = f \cdot \frac{3}{4}mg = ma$, z čehož pro součinitel smykového tření plyne

$$f = \frac{4a}{3g} = \frac{32\pi R}{3gt^2} = 0{,}22.$$

5 bodů

b) Z rovnic $s = \frac{1}{2}at^2$ a $v = at$ pro rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení plyne pro rychlost traktoru před začátkem brzdění

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{8\pi R}{t}. \qquad (1)$$

Frekvence otáčení zadního kola před brzděním byla

$$f_\mathrm{z} = \frac{1}{T_\mathrm{z}} = \frac{v}{2\pi R}.$$

Po dosazení vztahu (1) a po úpravě dostaneme

$$f_\mathrm{z} = \frac{4}{t} = 1{,}2\ \mathrm{Hz}.$$

Obdobně frekvence otáčení předního kola byla

$$f_\mathrm{p} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{3v}{4\pi R} = \frac{6}{t} = 1{,}8\ \mathrm{Hz}.$$

5 bodů

3.a) Hmotnost horního kvádru je $m = \frac{d}{d_0}m_0$. Při rovnoměrném pohybu působí na dolní plochu spodního kvádru proti pohybu třecí síla podložky a na jeho horní plochu třecí síla horního kvádru. Na spodní kvádr tak musí ve směru jeho rovnoměrného pohybu působit síla o velikosti

$$F_1 = f(m+m_0)g + fmg = f\left(m_0+2m\right)g =$$
$$= f\left(m_0 + 2\frac{d}{d_0}m_0\right)g = f\frac{d_0+2d}{d_0}m_0 g.$$

Dráha je $s_1 = d_0 - d$. Práce této síly je

$$W_1 = F_1 s_1 = f\frac{d_0+2d}{d_0}m_0 g\cdot(d_0-d) = \frac{\left(d_0+2d\right)\left(d_0-d\right)}{d_0}fm_0 g = 0{,}97\ \mathrm{J}.$$

5 bodů

b) Při rovnoměrném pohybu působí na spodní kvádr síla o stejné velikosti F_1 a navíc lanko silou stejné velikosti jako třecí síla, kterou působí spodní kvádr na dolní plochu horního kvádru. Na spodní kvádr tak musí ve směru jeho rovnoměrného pohybu působit síla o velikosti

$$F_2 = F_1 + fmg = f\left(m_0+2m\right)g + fmg = f\left(m_0+3m\right)g =$$
$$= f\left(m_0 + 3\frac{d}{d_0}m_0\right)g = f\frac{d_0+3d}{d_0}m_0 g.$$

Dráha je tentokrát poloviční: $s_2 = \dfrac{d_0-d}{2}$. Práce této síly je

$$W_2 = F_2 s_2 = f\frac{d_0+3d}{d_0}m_0 g\cdot\frac{d_0-d}{2} = \frac{\left(d_0+3d\right)\left(d_0-d\right)}{2d_0}fm_0 g = 0{,}59\ \mathrm{J}.$$

5 bodů

4.a) Z podmínky $F_v = mg\sin\alpha = mg\dfrac{h}{s}$ plyne

$$\frac{h}{s} = \frac{F_v}{mg} = 0{,}019 = 1{,}9\ \%.$$ **2 body**

b) Z důvodu nulové výslednice složky tíhové síly ve směru pohybu a síly valivého odporu je výkon tahové síly při rovnoměrném pohybu automobilu potřebný výhradně k překonávání odporu vzduchu. Pro tento výkon obecně platí

$$P = F_{odp}v = kv^2\cdot v = kv^3.$$

Při jednotlivých rychlostech tak dostaneme

$$P_1 = kv_1^3, \tag{1}$$
$$P_2 = kv_2^3. \tag{2}$$

Z rovnice (1) plyne

$$k = \frac{P_1}{v_1^3}. \tag{3}$$

Dosazením do rovnice (2) dostaneme

$$P_2 = P_1\frac{v_2^3}{v_1^3} = P_1\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = 22\ \mathrm{kW}.$$ **3 body**

c) Obdobně z rovnice $P_{\max} = kv_{\max}^3$ a z rovnice (3) dostaneme

$$v_{\max} = v_1 \sqrt[3]{\frac{P_{\max}}{P_1}} = 135\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

2 body

d) Tentokrát tahová síla, jejíž velikost je

$$F_1 = \frac{P_{\max}}{v_1}, \tag{4}$$

kromě překonávání odporové síly automobil urychluje. Dostaneme tak pohybovou rovnici

$$F_1 = kv_1^2 + ma_1.$$

Užitím vztahů (3) a (4) z rovnice dostaneme

$$\frac{P_{\max}}{v_1} = \frac{P_1}{v_1} + ma_1.$$

Z rovnice plyne

$$a_1 = \frac{P_{\max} - P_1}{mv_1} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

3 body