Řešení úloh krajského kola 59. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E

Autoři úloh: M. Ю. Ромашка (3) a J. Thomas (1–2, 4)

FO59E3–1: Na půlnoční

a) Během trvání vánice Emil ujde vzdálenost s. Kdyby nebyla vánice, urazil by tuto vzdálenost za dobu $t_1 = s/v_1$, ve vánici mu to bude trvat dobu $t_1' = s/v_2$. Rozdíl těchto časů je $t = 30\,\text{minut} = 0{,}5\,\text{h}$, tedy
$$t = \frac{s}{v_2} - \frac{s}{v_1}; \qquad s = \frac{t}{\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}} = \frac{0{,}5\,\text{h}}{\dfrac{1}{3\,\text{km/h}} - \dfrac{1}{5\,\text{km/h}}} = 3{,}75\,\text{km}.$$
Vánice tedy přišla, když byl Emil ve vzdálenosti $s = 3{,}75\,\text{km}$. Tuto vzdálenost ve vánici ušel za dobu $t_1' = s/v_2 = 3{,}75\,\text{km}/(3\,\text{km/h}) = 1{,}25\,\text{h}$. Do městečka došel 30 minut po půlnoci, tj. v 0:30 h, vánice tedy začala o hodinu a čtvrt dříve, ve 23:15 h. **3 body**

b) Emil přišel o 0,5 h později, původně plánoval na cestu čas $T = 2\,\text{h} - 0{,}5\,\text{h} = 1{,}5\,\text{h}$. Městečko je tedy od jeho vesnice vzdáleno
$$s_\text{c} = v_1 T = 5\,\text{km/h} \cdot 1{,}5\,\text{h} = 7{,}5\,\text{km}.$$
1 bod

c) Pavel plánoval na chůzi čas $t_2 = 24{:}00 - 22{:}30 = 1{,}5\,\text{h}$. Rychlost Pavla měla být podle plánu $v_3 = d/t_2 = 8\,\text{km}/1{,}5\,\text{h} = 16/3\,\text{h} \doteq 5{,}333\,3\,\text{h}$. Touto rychlostí šel jen do 23:15 h, tj. po dobu $t_3 = 45\,\text{min} = 0{,}75\,\text{h} = 3/4\,\text{h}$. Za tu dobu urazil vzdálenost $d_1 = v_3 t_3 = 16/3\,\text{km/h} \cdot 3/4\,\text{h} = 4\,\text{km}$. Ušel tedy polovinu cesty, druhou polovinu šel rychlostí v_2 za dobu
$$t_3' = \frac{d - d_1}{v_2} = \frac{d}{2v_2} = \frac{8\,\text{km/h}}{2 \cdot 3\,\text{km/h}} = \frac{4}{3}\,\text{h} = 1\,\text{h}\ 20\,\text{min}.$$
Místo o půlnoci tedy přijde do městečka ve $23\,\text{h}\ 15\,\text{min} + 1\,\text{h}\ 20\,\text{min}$, tj. 35 minut po půlnoci v čase 0:35 h. **3 body**

d) Michalova vesnice je ve vzdálenosti
$$s_4 = v_4 t_2 = 6\,\text{km/h} \cdot 1{,}5\,\text{h} = 9\,\text{km}.$$
Do začátku vánice ušel vzdálenost
$$s_5 = v_4 t_3 = 6\,\text{km/h} \cdot \frac{3}{4}\,\text{h} = 4{,}5\,\text{km},$$
tj. také polovinu cesty. Druhou polovinu cesty jde poloviční rychlostí, bude mu tedy trvat dvakrát tak dlouho, tedy dobu $t_4 = 1{,}5\,\text{h}$ neboli 1 h a 30 minut. Do městečka tedy dojde v čase $23\,\text{h}\ 15\,\text{min} + 1\,\text{h}\ 30\,\text{min}$, tj. 45 minut po půlnoci v čase 0:45 h. **3 body**

FO59E3–2: Tvorba páry

a) K zahřátí vody na teplotu $t_2 = 100\,°\text{C}$ musíme dodat teplo
$$Q_1 = mc\,(t_2 - t_1) = \varrho V c\,(t_2 - t_1) =$$
$$= 1{,}0\,\text{kg/dm}^3 \cdot 2\,\text{dm}^3 \cdot 4\,200\,\text{J/(kg} \cdot °\text{C)} \cdot (100\,°\text{C} - 20\,°\text{C}) = 672\,000\,\text{J}.$$

K zahřátí kotlíku musíme dodat teplo

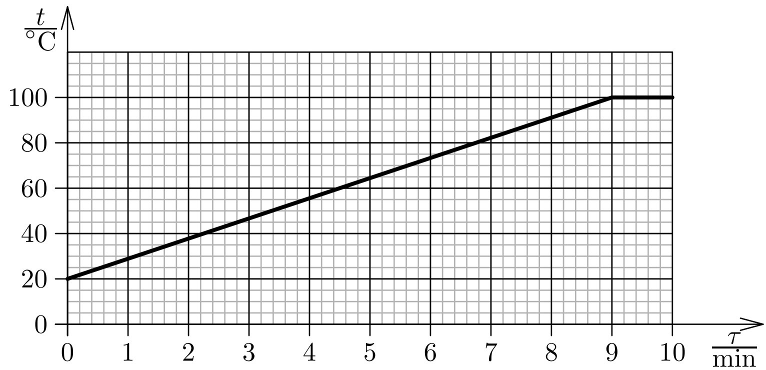
$$Q_2 = m_{\mathrm{Al}} c_{\mathrm{Al}} (t_2 - t_1) =$$

$$= 0{,}80\,\mathrm{kg} \cdot 900\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (100\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = 57\,600\,\mathrm{J}.$$

Zahřívání vody k bodu varu bude trvat dobu

$$\tau_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\eta P_0} = \frac{672\,000\,\mathrm{J} + 57\,600\,\mathrm{J}}{0{,}9 \cdot 1\,500\,\mathrm{W}} \doteq 540{,}44\,\mathrm{s} \doteq 540\,\mathrm{s} = 9\,\mathrm{min}.$$

Po dosažení teploty varu se další dodané teplo spotřebovává na přeměnu vody v páru a teplota se proto dále nezvyšuje. Graf závislosti teploty na čase je na obr. 1. **5 bodů**



Obr. 1: Graf závislosti teploty t na čase τ v úloze 2

b) Za zbývající čas zahřívání $\tau_2 = \tau - \tau_1 = 10\,\mathrm{min} - 9\,\mathrm{min} = 1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$ se odpaří voda o hmotnosti

$$m_1 = \frac{\eta P_0 \tau_2}{l_\mathrm{v}} = \frac{0{,}9 \cdot 1\,500\,\mathrm{W} \cdot 60\,\mathrm{s}}{2\,260\,000\,\mathrm{J/kg}} \doteq 0{,}035\,841\,\mathrm{kg} \doteq 36\,\mathrm{g},$$

tj. asi $0{,}036\,\mathrm{kg}/2\,\mathrm{kg} \doteq 0{,}018$, tedy asi $1{,}8\,\%$ původního množství vody. Při vhození kovové součástky se tedy odpařila ještě $4{,}8\,\% - 1{,}8\,\% = 3\,\%$ původního množství vody, což odpovídá hmotnosti $m_2 = 0{,}03 \cdot 2\,\mathrm{kg} = 0{,}06\,\mathrm{kg} = 60\,\mathrm{g}$ vody. **2 body**

c) Vhození kovové součástky způsobí odpaření vody o hmotnosti m_2 a musí proto platit

$$m_\mathrm{k} c_\mathrm{k} (t_3 - t_2) = m_2 l_\mathrm{v}.$$

Odtud vyjádříme

$$c_\mathrm{k} = \frac{m_2 l_\mathrm{v}}{m_\mathrm{k} (t_3 - t_2)} =$$

$$= \frac{0{,}060\,\mathrm{kg} \cdot 2\,260\,000\,\mathrm{J/kg}}{0{,}435\,\mathrm{kg} \cdot (900\,^\circ\mathrm{C} - 100\,^\circ\mathrm{C})} = 389{,}65\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \doteq 390\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}.$$

3 body

V tabulkách bychom zjistili, že kovová součástka je patrně měděná.

FO59E3–3: Z jedné kry na druhou

a) Pro každou kru platí, že tíhová síla působící na kru (plus tíhová síla působící na člověka, jestliže stojí na kře) je rovna vztlakové síle působící na ponořenou část kry. Podle Archimédova zákona pro vztlakovou sílu platí

$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho g V,$$

kde ϱ je hustota vody v oceánu, g tíhové (gravitační) zrychlení a V objem ponořené části kry, který můžeme vyjádřit vztahem $V = SH$, kde S je plocha podstavy a H výška ponořené části kry.

Odtud plyne, že výška H ponořené části kry je úměrná hmotnosti kry, případně součtu hmotností kry a Eskymáka, který na ní stojí. Přejde-li Eskymák z jedné kry na druhou, vynoří se první z vody o stejnou výšku, o jakou se naopak druhá ponoří pod vodu. **4 body**

Poznámka: Řešitelé mohou k tomuto závěru dospět různými cestami, doporučujeme uznat každé rozumné zdůvodnění.

Při přechodu ze kry 1 na kru 2 tedy získáváme vztah pro výšky částí ker nad vodou

$$h_1 + h_2 = h_{1\mathrm{a}} + h_{2\mathrm{a}}$$

a zároveň podle zadání po přeskoku budou horní podstavy ker 1 i 2 ve stejné výšce nad hladinou, takže $h_{1\mathrm{a}} = h_{2\mathrm{a}}$. Po dosazení do předcházející rovnice vychází

$$2h_{1\mathrm{a}} = h_1 + h_2, \quad h_{1\mathrm{a}} = h_{2\mathrm{a}} = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{5\,\mathrm{cm} + 10\,\mathrm{cm}}{2} = 7{,}5\,\mathrm{cm}.$$

U třetí kry se nic nezmění, proto $h_{3\mathrm{a}} = h_3 = 12\,\mathrm{cm}$. **3 body**

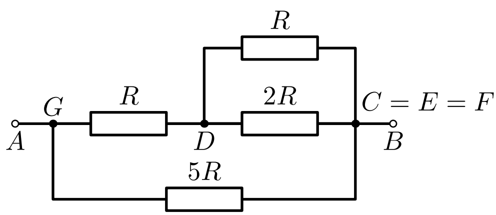
b) Z předcházející části vidíme, že výška vynořené části se změní vždy o $h = h_{1\mathrm{a}} - h_1 = h_2 - h_{2\mathrm{a}} = 10\,\mathrm{cm} - 7{,}5\,\mathrm{cm} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Po přeskoku ze kry 2 na kru 3 proto dostáváme

$$h_{2b} = h_{2a} + h = h_2 = 10\,\mathrm{cm}, \quad h_{3b} = h_3 - h = 12\,\mathrm{cm} - 2{,}5\,\mathrm{cm} = 9{,}5\,\mathrm{cm}.$$

U první kry se nic nezmění, $h_{1\mathrm{b}} = h_{1\mathrm{a}} = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. **3 body**

FO59E3–4: Obvod s rezistory

a) Protože rezistor $2R$ mezi body C a F je zkratovaný, nebude jím procházet žádný proud a nebude na něm žádné napětí. Proto můžeme schéma překreslit podle obr. 2. **2 body**



Obr. 2: Překreslený obvod s rezistory k úloze 4

Celkový odpor mezi body D a C vychází

$$R_{\mathrm{CD}} = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3}R.$$

Horní větev z bodu G do bodu C pak bude mít celkový odpor $R_{\mathrm{GDF}} = R + 2R/3 = 5R/3$ a celkový odpor mezi body A a B bude

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{5R \cdot \frac{5}{3}R}{5R + \frac{5}{3}R} = \frac{\frac{25}{3}R}{\frac{20}{3}} = \frac{25}{20}R = \frac{5}{4} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega} = 2{,}5\,\mathrm{k\Omega}.$$ **2 body**

b) Celkový proud mezi body A a B vychází

$$I_{\mathrm{AB}} = \frac{U_{AB}}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{\frac{5}{4}R} = \frac{4}{5} \cdot \frac{12\,\mathrm{V}}{2\,000\,\Omega} = 4{,}8\,\mathrm{mA}.$$

Na rezistoru $R_{GF} = 5R$ je napětí stejné jako napětí zdroje $U_{\mathrm{AB}} = 12\,\mathrm{V}$ a prochází jím proud

$$I_{\mathrm{GF}} = \frac{U_{\mathrm{GF}}}{5R} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{5R} = \frac{12\,\mathrm{V}}{5 \cdot 2\,000\,\Omega} = 1{,}2\,\mathrm{mA}.$$ **2 body**

Odpor horní větve je roven

$$R_{\mathrm{GDC}} = R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{5}{3}R$$

a rezistorem R mezi body G a D prochází proud

$$I_{\mathrm{GD}} = \frac{U_{\mathrm{GF}}}{R_{\mathrm{GDF}}} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5} \cdot \frac{12\,\mathrm{V}}{2\,000\,\Omega} = 3{,}6\,\mathrm{mA}.$$

Napětí na rezistoru pak bude

$$U_{\mathrm{GD}} = RI_{\mathrm{GD}} = R\frac{U_{\mathrm{AB}}}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}U_{\mathrm{AB}} = \frac{3}{5} \cdot 12\,\mathrm{V} = 7{,}2\,\mathrm{V}.$$ **2 body**

Na část obvodu mezi body D a C pak připadá napětí $U_{\mathrm{DC}} = U_{\mathrm{AB}} - U_{\mathrm{GD}} = 12\,\mathrm{V} - 7{,}2\,\mathrm{V} = 4{,}8\,\mathrm{V}$. Rezistorem o odporu R prochází proud

$$I_1 = \frac{U_{\mathrm{DC}}}{R} = \frac{4{,}8\,\mathrm{V}}{2\,000\,\Omega} = 2{,}4\,\mathrm{mA},$$

rezistorem o odporu $2R$ pak proud

$$I_2 = \frac{U_{\mathrm{DC}}}{2R} = \frac{4{,}8\,\mathrm{V}}{2 \cdot 2\,000\,\Omega} = 1{,}2\,\mathrm{mA}.$$

Platí také $I_{\mathrm{GD}} = I_1 + I_2$. **2 body**

Úlohy připravila komise pro výběr úloh při ÚKFO České republiky ve složení Martin Kapoun, Dagmar Kaštilová, Michaela Křížová, Miroslava Maňásková, Richard Polma, Jindřich Pulíček a Lukáš Richterek ve spolupráci s autorem úloh Janem Thomasem. Úloha 3 byla převzata z Московской городской олимпиады школьников по физике 2017 a časopisu Квант. V ilustracích k zadání byl použit volně šiřitelný obrázek ze serveru `http://clipart-library.com`.