Řešení úloh okresního kola 59. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie F

Autoři úloh: L. Richterek (2) a J. Thomas (1, 3–4)

FO59F2–1: Abertamy – Karlovy Vary

a) U obou autobusů je zadána vzdálenost, kterou ujedou za hodinu, snadno proto určíme jejich průměrné rychlosti; pro autobus ve všední den přes Merklín vychází $v_{\mathrm{M}} = 26\,\mathrm{km/h} \doteq 7{,}2\,\mathrm{m/s}$, pro nedělní přes Ostrov $v_{\mathrm{O}} = 32\,\mathrm{km/h} \doteq 8{,}9\,\mathrm{m/s}$.

2 body

b) Vzdálenost $s_{\mathrm{P}} = 2{,}5\,\mathrm{km}$ do Perninku musí ujít za čas $t_{\mathrm{P}} = 20\,\mathrm{min} = 1/3\,\mathrm{h}$, musí jít rychlostí

$$v_{\mathrm{P}} = \frac{s_{\mathrm{P}}}{t_{\mathrm{P}}} = \frac{2{,}5\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3}\,\mathrm{h}} = 7{,}5\,\mathrm{km/h} \doteq 2{,}1\,\mathrm{m/s}.$$ **2 body**

c) Do Merklína ujde Honza vzdálenost $s_{\mathrm{M}} = 10\,\mathrm{km}$ rychlostí $v_{\mathrm{M}} = 8{,}0\,\mathrm{km/h}$ za čas

$$t_{\mathrm{M}} = \frac{s_{\mathrm{M}}}{v_{\mathrm{M}}} = \frac{10\,\mathrm{km}}{8{,}0\,\mathrm{km/h}} = 1{,}25\,\mathrm{h} = 75\,\mathrm{min} = 1\,\mathrm{h}\ 15\,\mathrm{min}.$$ **2 body**

d) Vlak z Perninku do Karlových Varů jede po dobu $t_{\mathrm{v}} = 55\,\mathrm{min} = 55/60\,\mathrm{h}$ rychlostí $v_{\mathrm{v}} = 40\,\mathrm{km/h}$, délka úseku trati vychází

$$s_{\mathrm{v}} = v_{\mathrm{v}} t_{\mathrm{v}} = 40\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{55}{60}\,\mathrm{h} \doteq 36{,}667\,\mathrm{km} \doteq 37\,\mathrm{km}.$$ **2 body**

e) Lokálka jede z Merklína do Karlových Varů po dobu $t_{\mathrm{l}} = 16{:}42\,\mathrm{h} - 16{:}17\,\mathrm{h} = 25\,\mathrm{min} = 25/60\,\mathrm{h}$ a ujede vzdálenost $s_{\mathrm{l}} = 14\,\mathrm{km}$. Její průměrná rychlost vychází

$$v_{\mathrm{l}} = \frac{s_{\mathrm{l}}}{t_{\mathrm{l}}} = \frac{14\,\mathrm{km}}{\frac{25}{60}\,\mathrm{h}} = 33{,}6\,\mathrm{km/h} \doteq 9{,}3\,\mathrm{m/s}.$$ **2 body**

FO59F2–2: Vrátka v Bradavicích

a) Pro hmotnost kamene o objemu $V = 72\,\mathrm{l} = 0{,}072\,\mathrm{m^3}$ a hustotě $\varrho = 2{,}5\,\mathrm{g/cm^3} = 2\,500\,\mathrm{kg/m^3}$ platí

$$m_1 = \varrho V = 2\,500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}072\,\mathrm{m^3} = 180\,\mathrm{kg}.$$ **2 body**

b) Protože na obou stranách pevných kladek v rovnováze působí vždy stejné síly, rozhodující je rovnováha na páce. Můžeme psát

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2.$$

Odtud

$$l_2 = l_1 \frac{m_1}{m_2} = 30\,\mathrm{cm} \cdot \frac{180\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg}} = 90\,\mathrm{cm}.$$

Celková délka páky pak musí být nejméně $l = l_1 + l_2 = 30\,\mathrm{cm} + 90\,\mathrm{cm} = 120\,\mathrm{cm}$.

4 body

c) Protože poměr hmotností kamene a Harryho je $m_1 : m_2 = 3 : 1$, musí platit $l_1 : l_2 = 1 : 3$. Pokud bychom dělili Hagridovo prkno bez zkrácení, vycházejí délky

$$l_1' = l' \frac{1}{3+1} = \frac{165\,\mathrm{cm}}{4} = 41{,}25\,\mathrm{cm}, \qquad l_2' = l' \frac{3}{3+1} = \frac{3 \cdot 165\,\mathrm{cm}}{4} = 123{,}75\,\mathrm{cm}.$$

Výhodnější bude zkrátit prkno na délku dělitelnou 4, např. na 160 cm; potom vychází

$$l_1' = l' \frac{1}{3+1} = \frac{160\,\mathrm{cm}}{4} = 40\,\mathrm{cm}, \qquad l_2' = l' \frac{3}{3+1} = \frac{3 \cdot 160\,\mathrm{cm}}{4} = 120\,\mathrm{cm}.$$

4 body

Poznámka: V části c) by měl být podle zadání uznán i jiný rozumný celočíselný výsledek, např. zkrácení na 164 cm (potom $l_1' = 41\,\mathrm{cm}$, $l_2' = 123\,\mathrm{cm}$) nebo na 156 cm (potom $l_1' = 39\,\mathrm{cm}$, $l_2' = 117\,\mathrm{cm}$).

FO59F2–3: Tři nádoby

a) Přidáním kapaliny ze druhé nádoby se v první nádobě teplota sníží na teplotu t. Podle kalorimetrické rovnice je teplo odevzdané kapalinou v první nádobě a první nádobou rovno teplu přijatému kapalinou přelitou ze druhé nádoby; můžeme proto psát

$$m_1 c\,(t_1 - t) + \frac{m_1}{2}\frac{c}{5}\,(t_1 - t) = \frac{m_1}{2} c\,(t - t_2)$$

Po zkrácení výrazem $m_1 c$ a vynásobení 10 získáme rovnici

$$10\,(t_1 - t) + (t_1 - t) = 5\,(t - t_2)$$

neboli

$$11\,(t_1 - t) = 5\,(t - t_2)$$

Odtud vyjádříme

$$t = \frac{11 t_1 + 5 t_2}{16} = \frac{11 \cdot 50\,^\circ\mathrm{C} + 5 \cdot 30\,^\circ\mathrm{C}}{16} = 43{,}75\,^\circ\mathrm{C} \doteq 44\,^\circ\mathrm{C}.$$

5 bodů

b) Po přelití kapaliny o celkové hmotnosti $m_1 + m_1/2 = 3m_1/2$ z první do třetí nádoby o hmotnosti $m_1/2$ se třetí nádoba o měrné tepelné kapacitě $c/5$ zahřeje na teplotu t_4. Podle kalorimetrické rovnice platí

$$\frac{3m_1}{2} c\,(t - t_4) = \frac{m_1}{2}\frac{c}{5}\,(t_4 - t_3)\,.$$

Po zkrácení výrazem $m_1 c$ a vynásobení 10 získáme rovnici

$$15\,(t - t_4) = t_4 - t_3,$$

$$t_4 = \frac{15t + t_3}{16} = \frac{15 \cdot 43{,}75\,^\circ\mathrm{C} + 20\,^\circ\mathrm{C}}{16} \doteq 42{,}266\,^\circ\mathrm{C} \doteq 42\,^\circ\mathrm{C}.$$

5 bodů

Poznámka: Doporučujeme uznat za správný i výsledek, kdy řešitelé dosadí z části a) zaokrouhlený výsledek $t = 44\,^\circ\mathrm{C}$, potom vychází

$$t_4 = \frac{15t + t_3}{16} = \frac{15 \cdot 44\,^\circ\mathrm{C} + 20\,^\circ\mathrm{C}}{16} \doteq 42{,}5\,^\circ\mathrm{C} \doteq 43\,^\circ\mathrm{C}.$$

FO59F2–4: Dvě pružiny

a) Závažím o hmotnosti $m_1' = 15\,\mathrm{g}$ se pružina prodlouží o 1,0 cm. Závažím o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ se tedy prodlouží o $\Delta l_1 = 1\,\mathrm{cm} \cdot m/m_1' = 1\,\mathrm{cm} \cdot 100\,\mathrm{g}/15\,\mathrm{g} =$

$= 6{,}666\,7\,\mathrm{cm} \doteq 6{,}7\,\mathrm{cm}$ a její délka bude celkem $l_1 + \Delta l_1 \doteq 20\,\mathrm{cm} + 6{,}7\,\mathrm{cm} \doteq 27\,\mathrm{cm}$.

2 body

b) Závažím o hmotnosti $m'_2 = 8{,}0\,\mathrm{g}$ se pružina prodlouží o 1,0 cm. Závažím o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ se tedy prodlouží o $\Delta l_2 = 1\,\mathrm{cm} \cdot m/m'_2 = 1\,\mathrm{cm} \cdot 100\,\mathrm{g}/8{,}0\,\mathrm{g} = 12{,}5\,\mathrm{cm} \doteq 13\,\mathrm{cm}$ a její celková délka bude $l_2 + \Delta l_2 \doteq 35\,\mathrm{cm} + 13\,\mathrm{cm} \doteq 48\,\mathrm{cm}$.

2 body

c) Zavěšením druhé pružiny se první pružina prodlouží o

$$\Delta l_3 = 1\,\mathrm{cm} \cdot m_2/m'_1 = 1\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{g}/15\,\mathrm{g} \doteq 1{,}333\,3\,\mathrm{cm} \doteq 1{,}3\,\mathrm{cm},$$

přidáním závaží ještě o $\Delta l_1 = 6{,}7\,\mathrm{cm}$. Celkové prodloužení první pružiny tedy bude $\Delta l'_1 = \Delta l_1 + \Delta l_3 \doteq 6{,}666\,7\,\mathrm{cm} + 1{,}333\,3\,\mathrm{cm} \doteq 8{,}0\,\mathrm{cm}$; druhá pružina se prodlouží o $\Delta l_2 = 12{,}5\,\mathrm{cm}$. Celková délka obou pružin bude

$$l_{12} = l_1 + l_2 + \Delta l'_1 + \Delta l_2 = 20\,\mathrm{cm} + 35\,\mathrm{cm} + 8\,\mathrm{cm} + 12{,}5\,\mathrm{cm} \doteq 75{,}5\,\mathrm{cm} \doteq 76\,\mathrm{cm}.$$

3 body

Zaměníme-li pořadí pružin, pak se druhá pružina prodlouží při zavěšení první pružiny o

$$\Delta l_4 = 1\,\mathrm{cm} \cdot m_1/m'_2 = 1\,\mathrm{cm} \cdot 25\,\mathrm{g}/8\,\mathrm{g} \doteq 3{,}125\,\mathrm{cm} \doteq 3{,}1\,\mathrm{cm},$$

přidáním závaží ještě o $\Delta l_2 = 12{,}5\,\mathrm{cm}$. Celkové prodloužení první pružiny tedy bude $\Delta l'_2 = \Delta l_2 + \Delta l_4 \doteq 12{,}5\,\mathrm{cm} + 3{,}1\,\mathrm{cm} \doteq 16\,\mathrm{cm}$; první pružina se prodlouží o $\Delta l_1 = 6{,}7\,\mathrm{cm}$. Celková délka obou pružin bude

$$l_{21} = l_1 + l_2 + \Delta l_1 + \Delta l'_2 = 20\,\mathrm{cm} + 35\,\mathrm{cm} + 6{,}7\,\mathrm{cm} + 16\,\mathrm{cm} \doteq 77{,}7\,\mathrm{cm} \doteq 78\,\mathrm{cm}.$$

3 body

Úlohy připravila komise pro výběr úloh při ÚKFO České republiky ve složení Martin Kapoun, Dagmar Kaštilová, Michaela Křížová, Miroslava Maňásková, Richard Polma, Jindřich Pulíček a Lukáš Richterek ve spolupráci s autorem úloh Janem Thomasem.