Řešení úloh školního kola 59. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie G – Archimédiáda

Autoři úloh: D. Kaštilová (3, 4), Ľ. Konrád (5), J. Thomas (1, 2)

FO59G1–1: Cesta na Moravu

a) Z grafu postupně odečteme časy t_i a délky jednotlivých úseků s_i, z nich dopočítáme průměrné rychlosti $v_i = s_i/t_i$:

	Úsek 1	Úsek 2	Úsek 3	Úsek 4	Úsek 5
doba jízdy t_i/h	2,5	1,5	0,5	1,0	2,5
délka úseku s_i/km	200	50	0	100	100
průměrná rychlost v_i v km/h	80	33	0	100	40

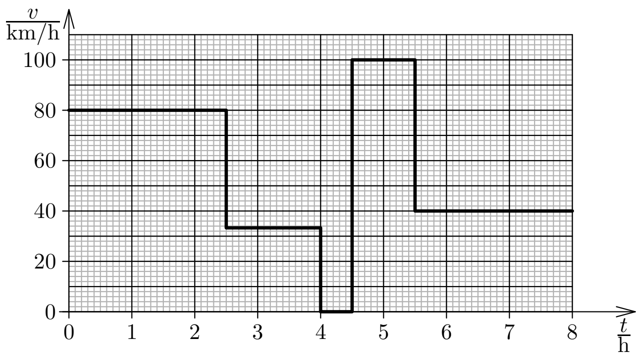
Hodnoty průměrných rychlostí jsou zaokrouhleny na dvě platné číslice. **5 bodů**

b) Průměrnou rychlost vypočítáme jako podíl celkové ujeté vzdálenosti $s = 450\,\mathrm{km}$ a celkové doby jízdy $t = 8\,\mathrm{h}$; vychází

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{450\,\mathrm{km}}{8\,\mathrm{h}} = 56{,}25\,\mathrm{km/h} \doteq 56\,\mathrm{km/h}.$$

Výsledek lze vyjádřit, i když je to v vzhledem k zadání méně vhodné, také v m/s; dostáváme $v_\mathrm{p} = 15{,}625\,\mathrm{m/s} \doteq 16\,\mathrm{m/s}$. **2 body**

c) Graf závislosti rychlosti na čase sestavíme pomocí hodnot ve třetím řádku tabulky, příklad možného provedení je na obr. 1.



Obr. 1: Graf závislosti rychlosti rychlosti na čase $v = v(t)$ k řešení úlohy 1

3 body

FO59G1–2: Chlapec se psem

a) Pohybují-li se Martin a pes ve stejném směru, je jejich vzájemná rychlost $v_2 - v_1 = 5\,\mathrm{m/s} - 2\,\mathrm{m/s} = 3\,\mathrm{m/s}$. Pes uběhne navíc vzdálenost $4a = 4 \cdot 20\,\mathrm{m} = 80\,\mathrm{m}$, proto dožene Martina za dobu

$$t_1 = \frac{4a}{v_2 - v_1} = \frac{80\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s}} \doteq 26{,}667\,\mathrm{s} \doteq 27\,\mathrm{s}.$$

Martin přitom ujde vzdálenost $s_1 = v_1 t_1 = 2\,\mathrm{m/s} \cdot 26{,}667\,\mathrm{s} \doteq 53{,}333\,\mathrm{m} \doteq 53\,\mathrm{m}$. Protože po obvodu měří trasa $A - B - C - D$ celkem $3a = 3 \cdot 20\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$, bude Martin $7\,\mathrm{m}$ před bodem D (a $13\,\mathrm{m}$ za bodem C). **4 body**

b) Pohybují-li se Martin a pes v opačném směru, je jejich vzájemná rychlost $v_2 + v_1 = 5\,\mathrm{m/s} + 2\,\mathrm{m/s} = 7\,\mathrm{m/s}$. Dohromady urazí vzdálenost $4a$, potkají se tedy za dobu

$$t_2 = \frac{4a}{v_2 + v_1} = \frac{80\,\mathrm{m}}{7\,\mathrm{m/s}} \doteq 11{,}429\,\mathrm{s} \doteq 11\,\mathrm{s}.$$

Martin přitom ujde vzdálenost $s_2 = v_1 t_2 = 2\,\mathrm{m/s} \cdot 11{,}429\,\mathrm{s} \doteq 22{,}857\,\mathrm{m} \doteq 23\,\mathrm{m}$. Bude tedy $3\,\mathrm{m}$ za bodem B. **3 body**

c) Aby byla vzdálenost mezi Martinem a jeho psem co největší, musí se oba ve stejnou dobu nacházet v protějších rozích čtverce. Martin ujde jednu stranu za čas $a/v_1 = 20\,\mathrm{m}/(2\,\mathrm{m/s}) = 10\,\mathrm{s}$; v rozích čtverce bude v časech:

Martin v rozích 10 s, 20 s, 30 s, 40 s, 50 s, 60 s, ...

Pes uběhne vzdálenost podél jedné strany dvorku za čas $a/v_2 = 20\,\mathrm{m}/(5\,\mathrm{m/s}) = 4\,\mathrm{s}$; v rozích čtverce bude v časech:

pes v rozích 4 s, 8 s, 12 s, 16 s, 20 s, 24 s, ...

Při pohybu stejným směrem budou oba v rohu poprvé po 20 s, Martin v bodě C, pes oběhne jednou dvorek a ještě stranu $A - B$ (bude tedy v bodě B). V protějších rozích se budou poprvé nacházet po 40 s, kdy bude Martin v bodě A (jednou obejde dvorek) a pes v bodě C (oběhne dvorek $2\times$ a ještě trasu $A - B - C$). Výsledek bude stejný i v případě, kdy se pes pohybuje opačným směrem, než chlapec. **3 body**

FO59G1–3: Hrošice Gloria na moři

a) Určíme si hmotnost m bedny s hrošicí $m = m_\mathrm{B} + m_\mathrm{H} = 150\,\mathrm{kg} + 1\,800\,\mathrm{kg} = 1\,950\,\mathrm{kg}$. Vypočítáme tíhovou sílu, která působí na bednu s hrošicí $F_\mathrm{G} = mg = 1\,950\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 19\,110\,\mathrm{N}$. Protože bedna plave a část jí vyčnívá nad hladinu, je tíhová síla F_G rovna vztlakové síle F_vz, která se vypočítá $F_\mathrm{vz} = V_1 \varrho g$, kde V_1 je objem ponořené části bedny. Z rovnosti $F_\mathrm{vz} = F_\mathrm{G}$ vypočítáme objem ponořené části

$$V_1 = \frac{F_\mathrm{G}}{\varrho g} = \frac{19\,110\,\mathrm{N}}{1\,020\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}} \doteq 1{,}911\,8\,\mathrm{m^3}.$$

Dále vypočítáme plochu dna $S = ab = 2{,}5\,\mathrm{m} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 3{,}75\,\mathrm{m^2}$. Ze vztahu $V_1 = Sh_1$ vypočítáme h_1, což je hloubka ponoru, kam dosahuje dno bedny

$$h_1 = \frac{V_1}{S} = \frac{1{,}911\,8\,\mathrm{m^3}}{3{,}75\,\mathrm{m^2}} \doteq 0{,}509\,81\,\mathrm{m} \doteq 0{,}51\,\mathrm{m}.$$

Pro hledanou výšku h_0, která je nad vodou, platí $h_0 = h - h_1 = 0{,}8\,\mathrm{m} - 0{,}51\,\mathrm{m} = 0{,}29\,\mathrm{m}$. **5 bodů**

b) Bedna ještě plave, když je právě celá ponořená pod hladinu. Potom pro vztlakovou sílu platí $F_{\mathrm{vz2}} = V\varrho g$, kde V je objem celé bedny. Postupně vychází

$$V = abh = 2{,}5\,\mathrm{m} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}^3,$$
$$F_{\mathrm{vz2}} = V\varrho g = 3\,\mathrm{m}^3 \cdot 1\,020\,\mathrm{kg/m}^3 \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 29\,988\,\mathrm{N} \doteq 30\,\mathrm{kN}.$$

Pro tíhovou sílu platí $F_{\mathrm{G2}} = m_{\mathrm{c}}g$, kde m_{c} je hmotnost bedny s hrošicí a se zásobami. Z rovnosti $F_{\mathrm{vz2}} = F_{\mathrm{G2}}$ vypočítáme hmotnost m_{c}

$$m_{\mathrm{c}} = \frac{F_{\mathrm{G2}}}{g} = \frac{F_{\mathrm{vz2}}}{g} = \frac{V\varrho g}{g} = V\varrho = 3\,\mathrm{m}^3 \cdot 1\,020\,\mathrm{kg/m}^3 = 3\,060\,\mathrm{kg}.$$

Pro hmotnost zásob m_{z} platí $m_{\mathrm{z}} = m_{\mathrm{c}} - m = 3\,060\,\mathrm{kg} - 1\,950\,\mathrm{kg} = 1\,110\,\mathrm{kg}.$

5 bodů

Poznámka: Při řešení mlčky předpokládáme splnění určitých podmínek – náklad musí být v bedně rovnoměrně rozložen a hrošice nesmí přejít k okraji bedny, aby do bedny shora nenatekla voda.

FO59G1–4: Lev Alex zavěšuje maso

a) Z rovnováhy na volné kladce plyne pro tíhovou sílu koše s masem $F_{\mathrm{G}} = 2F = 80\,\mathrm{N}$. Hmotnost m koše s masem určíme ze vztahu

$$m = \frac{F_{\mathrm{G}}}{g} = \frac{80\,\mathrm{N}}{9{,}8\,\mathrm{N/kg}} \doteq 8{,}163\,3\,\mathrm{kg} \doteq 8{,}2\,\mathrm{kg}.$$

Hmotnost samotného masa vychází $m_{\mathrm{m}} = m - m_{\mathrm{k}} \doteq 8{,}2\,\mathrm{kg} - 2\,\mathrm{kg} = 6{,}2\,\mathrm{kg}.$

4 body

b) Hmotnost masa s plechem bude $m_{\mathrm{c}} = m_{\mathrm{m}} + m_{\mathrm{p}} = 6{,}2\,\mathrm{kg} + 0{,}50\,\mathrm{kg} = 6{,}7\,\mathrm{kg}$. Určíme plochu plechu

$$S = ab = 18\,\mathrm{cm} \cdot 24\,\mathrm{cm} = 432\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}043\,2\,\mathrm{m}^2.$$

Tíhová síla masa a plechu je $F_{\mathrm{GC}} = m_{\mathrm{c}}g = 65{,}66\,\mathrm{N}$. Tlak plechu s rybami na podložku je

$$p = \frac{F_{\mathrm{GC}}}{S} = \frac{65{,}66\,\mathrm{N}}{0{,}043\,2\,\mathrm{m}^2} \doteq 1\,519{,}9\,\mathrm{Pa} \doteq 1\,500\,\mathrm{Pa}.$$

Plech s masem působí na podložku tlakem $1\,500\,\mathrm{Pa}$. **3 body**

c) Podobně jako v části a), pro tíhovou sílu koše s masem $F_{\mathrm{G1}} = 2F_1 = 120\,\mathrm{N}$. Hmotnost m' koše s masem určíme ze vztahu

$$m' = \frac{F_{\mathrm{G1}}}{g} = \frac{120\,\mathrm{N}}{9{,}8\,\mathrm{N/kg}} \doteq 12{,}245\,\mathrm{kg}.$$

Hmotnost přidaného samotného masa vychází $m_1 = m' - m_{\mathrm{m}} - m_{\mathrm{k}} \doteq 12{,}245\,\mathrm{kg} - 6{,}2\,\mathrm{kg} - 2\,\mathrm{kg} \doteq 4{,}0\,\mathrm{kg}$. K výsledku lze dospět i odečtením hodnoty získané v části a): $m_1 = m' - m \doteq 12{,}245\,\mathrm{kg} - 8{,}2\,\mathrm{kg} \doteq 4{,}0\,\mathrm{kg}.$ **3 body**

FO59G1–5: Experiment – měření srdečního pulsu
Cílem úlohy je experimentální zkoumání periodického děje a zamyšlení se na výsledky měření.

Pulz se měří obvykle počítáním tlakových pulzů za zvolený čas, typicky 1 min nebo 10 s (potom se hodnota vynásobí 6×, abychom získali počet pulsů za minutu). Pulzy jsou často dobře hmatatelné na zápěstí ruky popř. na jiných částech těla, kde tepna vystupuje blíže k povrchu; místo vhodné k měření je třeba vyzkoušet individuálně. Pro zvýšení přesnosti je vhodné měření několikrát zopakovat a výslednou hodnotu určit jako průměr. Protože je doba mezi pulzy krátká, je potřeba měřit dobu co největšího počtu pulzů. U zdravého dospělého člověka v klidu se frekvence pulzů pohybuje okolo 60–80 pulzů za minutu. Srdce při každém z nich vytlačí asi 70 ml krve, což při frekvenci 70 pulsů/min odpovídá objemu okolo 5 l vytlačené krve za minutu.

Při zvýšené námaze se tepová frekvence zvyšuje např. až na 150 pulzů/min, zvětšuje se i objem krve vytlačené do tepen srdcem až na 140 ml při jednom stažení. Za minutu tak může přečerpat až 20 l krve. Sportovci drží poměrně stálou frekvenci tepů, při námaze výrazně zvyšují tepový objem.

Výsledky měření se u různých lidí liší, měly by odpovídat tomu, že při fyzické námaze se tepová frekvence zvyšuje, protože tělo a jeho orgány potřebují více kyslíku; srdce proto musí přečerpat za stejný čas více krve, která kyslík po těle přenáší.