Řešení úloh krajského kola 60. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3), V. Vícha (4)

1. a) Mezi spodní destičkou a podložkou působí proti vzájemnému pohybu síla tření o velikosti nejvýše $F_{t3} = 3fmg$, mezi spodní destičkou a prostřední destičkou působí proti vzájemnému pohybu síla tření o velikosti $F_{t2} = 2fmg$ a mezi horní a prostřední destičkou působí proti vzájemnému pohybu síla $F_{t1} = fmg$. Nemá-li se horní deska při pohybu prostřední destičky pohnout, je maximální zrychlení prostřední destičky

$$a_m = \frac{fmg}{m} = fg;$$

nemá-li se pohnout prostřední destička, může se spodní destička pohybovat také nejvýše se zrychlením

$$a_m = \frac{f2mg}{2m} = fg = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

2 body

Z pohybové rovnice $F_1 - 3fmg = 3ma_m$ plyne

$$F_1 = 6fmg = 2{,}4\ \mathrm{N}.$$

1 bod

b) Protože síla tření mezi spodní destičkou a prostřední destičkou je menší než síla tření mezi spodní destičkou a podložkou, zůstane spodní destička v klidu stejně jako horní destička. Platí tedy

$$F_2 = F_{t1} + F_{t2} = 3fmg = 1{,}2\ \mathrm{N}.$$

1 bod

c) Z pohybové rovnice pro spodní destičku $ma_\mathrm{m} = F_3 - 5fmg$ plyne

$$F_3 = 6fmg = 2{,}4\ \mathrm{N}.$$

1 bod

d) Dokud je spodní destička v kontaktu s destičkou prostřední, působí proti jejímu pohybu síla tření o velikosti $5fmg$. Pro velikost zrychlení spodní destičky platí

$$ma_1 = m\frac{v_0 - v_1}{\Delta t} = 5fmg,$$

kde Δt je doba, po kterou jsou spodní a prostřední destička v kontaktu. Odtud pak

$$\Delta t = \frac{v_0 - v_1}{5fg}.$$

Horní a prostřední destička se pohybují se zrychlením $a_2 = fg$ a za dobu Δt získají rychlost

$$v_2 = fg\Delta t = \frac{v_0 - v_1}{5} = 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

Po pádu horní a prostřední destičky na podložku urazí spodní destička ještě vzdálenost $s_1 = \dfrac{v_1^2}{2fg}$, horní a prostřední destička urazí vzdálenost

$$s_2 = \frac{v_2^2}{2fg} = \frac{(v_0 - v_1)^2}{50fg}.$$

Pokud bude $s_2 < s_1$, budou se destičky nacházet ve vzájemné vzdálenosti

$$s_1 - s_2 = \frac{v_1^2}{2fg} - \frac{(v_0 - v_1)^2}{50fg} = \frac{24v_1^2 - v_0^2 + 2v_0 v_1}{50fg} = 0{,}21 \text{ m}.$$

3 body

2. a) Ze vztahu $\rho = \rho_0 \left(1 + \dfrac{h}{h_0}\right)$ je vidět, že h_0 je hloubka, ve které má hustota kapaliny hodnotu $\rho = 2\rho_0$.

1 bod

b) Na vodorovnou plochu velikosti S v hloubce h pod hladinou kapaliny působí síla, jejíž velikost je rovna velikosti tíhové síly kapaliny, která leží nad ní. Protože se hustota kapaliny lineárně zvětšuje s hloubkou, je průměrná hustota kapaliny nad touto plochou rovna

$$\rho = \frac{\rho_0 + \rho_0 \left(1 + \dfrac{h}{h_0}\right)}{2}$$

a hydrostatický tlak v hloubce h

$$p(h) = \frac{mg}{S} = h\rho g = h\frac{\rho_0 + \rho_0 \left(1 + \dfrac{h}{h_0}\right)}{2} \cdot g = \rho_0 g h \left(1 + \frac{h}{2h_0}\right).$$

4 body

c) Válec se zastaví, bude-li se jeho těžiště nacházet v hloubce, kde je jeho hustota rovna hustotě okolní kapaliny, tedy

$$\frac{3\rho_0}{2} = \rho_0 \left(1 + \frac{h_1}{h_0}\right) \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{h_0}{2}.$$

2 body

d) Nejprve určíme polohu těžiště tělesa vzhledem k ploše, spojující oba válce. Protože spodní válec má dvakrát větší poloměr, má čtyřikrát větší objem. Souřadnice těžiště pak bude

$$y_T = \frac{\frac{l}{2}V - \frac{l}{2}4V}{5V} = -\frac{3}{10}l.$$

Těžiště leží pod plochou, spojující oba válce. Stejnou úvahou jako v části c) určíme polohu plochy, spojující oba válce, vzhledem k hladině

$$h_2 = \frac{h_0}{2} - \frac{3}{10}l.$$

3 body

Alternativní řešení části c).

V rovnováze platí, že tíha válce se rovná rozdílu velikostí tlakových sil na spodní a horní podstavu válce:

$$mg = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)\, S,$$

$$\frac{3\rho_0}{2} Slg = \rho_0 Sg \left[\left(h + \frac{l}{2}\right)\left(1 + \frac{h + \frac{l}{2}}{2h_0}\right) - \left(h - \frac{l}{2}\right)\left(1 + \frac{h - \frac{l}{2}}{2h_0}\right)\right],$$

$$\frac{3}{2}l = \left(h + \frac{l}{2}\right) - \left(h - \frac{l}{2}\right) + \frac{\left(h + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(h - \frac{l}{2}\right)^2}{2h_0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}l = l + \frac{2hl}{2h_0} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{h_0}{2}.$$

Alternativní řešení části d).

V rovnováze platí, že tíha spojených válců se rovná rozdílu tlakových sil na spodní podstavu spodního válce a na část horní podstavy spodního válce a na horní podstavu horního válce. Protože průměr spodního válce je dvakrát větší, má spodní válec čtyřikrát větší hmotnost i plochu podstavy. V rovnováze platí

$$5mg = \frac{15\rho_0}{2} Slg = F_3 - F_4 - F_5 =$$

$$= (h_2 + l)\, \rho_0 4Sg \left(1 + \frac{h_2 + l}{2h_2}\right) - (h_2 - l)\, \rho_0 \mathrm{Sg} \left(1 + \frac{h_2 - l}{2h_2}\right) - h_2 \rho_0 3Sg \left(1 + \frac{h_2}{2h_0}\right),$$

$$\frac{15}{2}l = 4\,(h_2 + l)\left(1 + \frac{h_2 + l}{2h_0}\right) - (h_2 - l)\left(1 + \frac{h_2 - l}{2h_0}\right) - 3h_2\left(1 + \frac{h_2}{2h_0}\right),$$

$$\frac{15}{2}l - 5l = \frac{4\,(h_2 + l)^2 - (h_2 - l)^2 - 3h_2^2}{2h_0} = \frac{10h_2 l + 3l^2}{2h_0},$$

$$5 = \frac{10h_2 + 3l}{h_0} \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{h_0}{2} - \frac{3}{10}l.$$

3. a) Protože má první čočka menší průměr, bude se část světelných paprsků lámat na první čočce a pak i na druhé čočce, část paprsků se bude lámat jen na druhé čočce. Obraz vytvořený první čočkou bude ve vzdálenosti a', pro kterou platí

$$a' = \frac{af_1}{a - f_1} = \frac{20}{3}\ \text{cm}.$$

1 bod

Tento obraz je ve vzdálenosti

$$a_1 = b - a - a' = \frac{70}{3}\ \text{cm}$$

před druhou čočkou, která vytvoří obraz ve vzdálenosti

$$a_1' = \frac{a_1 f_2}{a_1 - f_2} = 140\ \ \text{cm}$$

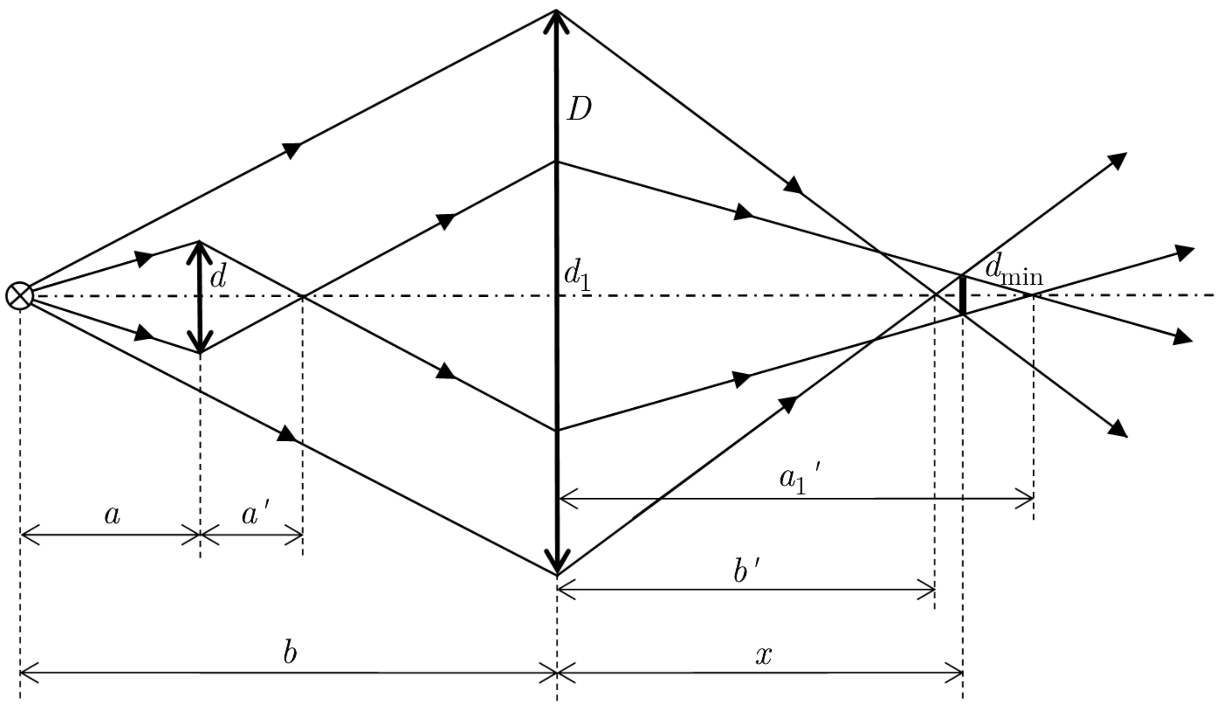
za druhou čočkou. **1 bod**

Průměr světelné stopy na druhé čočce označme d_1. Obraz vytvořený pouze druhou čočkou bude ve vzdálenosti

$$b' = \frac{b f_2}{b - f_2} = \frac{100}{3}\ \text{cm}$$

za druhou čočkou. **2 body**

b) Průchod paprsků čočkami je na obrázku R1:



Obr. R1

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{d_{\min}}{D} = \frac{x - b'}{b'},$$

$$\frac{d_1}{d} = \frac{b - a - a'}{a'},$$

$$\frac{d_{\min}}{d_1} = \frac{a_1' - x}{a_1'}.$$

Z druhé rovnice můžeme vyjádřit d_1:

$$d_1 = \frac{b - a - a'}{a'} d = \frac{70}{3}\ \mathrm{cm}.$$

Dosazením za d_1 z druhé rovnice do třetí

$$\frac{d_{\min}}{\dfrac{b - a - a'}{a'} d} = \frac{a_1' - x}{a_1'},$$

$$d_{\min} = \frac{a_1' - x}{a_1'} \cdot \frac{b - a - a'}{a'} d.$$

a po vyjádření $d_{\min}$ z první rovnice $d_{\min} = \dfrac{x - b'}{b'} D$ porovnáním dostaneme

$$\frac{x - b'}{b'} D = \frac{a_1' - x}{a_1'} \cdot \frac{b - a - a'}{a'} d,$$

po číselném dosazení

$$\frac{\{x\} - \dfrac{100}{3}}{\dfrac{100}{3}} \cdot 10 = \frac{140 - \{x\}}{140} \cdot \frac{50 - 20 - \dfrac{20}{3}}{\dfrac{20}{3}} \cdot 1 = \frac{140 - \{x\}}{140} \cdot \frac{7}{2}$$

$$3\,\{x\} - 100 = \frac{140 - \{x\}}{140} . \frac{70}{2} = \frac{140 - \{x\}}{4}$$

$$12\,\{x\} - 400 = 140 - \{x\}$$

$$13\,\{x\} = 540$$

$$\{x\} = 41{,}5.$$

Světelná stopa o nejmenším průměru vznikne 41,5 cm za druhou čočkou.

4 body

c) Po číselném dosazení do první rovnice

$$d_{\min} = \frac{x - b'}{b'} D = \frac{41{,}5 - \dfrac{100}{3}}{\dfrac{100}{3}} \cdot 10\ \mathrm{cm} = 2{,}45\ \mathrm{cm}.$$

Nejmenší průměr světelné stopy na stínítku bude 2,5 cm. **2 body**

4. a) Nejprve vyjádříme kinetickou energii $E_{\mathrm{k}i}$ (vzhledem k laboratorní soustavě) soustavy částic před reakcí

$$E_{\mathrm{k}i} = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Nyní vyjádříme kinetickou energii $E_{\mathrm{k}f}$ spojených částic po reakci

$$E_{\mathrm{k}f} = \frac{1}{2}\left(2m_0\right)u^2,$$

kde u je rychlost spojených částic po reakci.
Pro určení rychlosti u využijeme zákon zachování hybnosti

$$m_0 v = 2m_0 u.$$

Odtud $u = \dfrac{v}{2}$ a $E_{\mathrm{k}f} = \frac{m_0 v^2}{4}$.
Vyjádříme požadovaný poměr energií

$$\frac{E_{\mathrm{k}f}}{E_{\mathrm{k}i}} = \frac{\dfrac{m_0 v^2}{4}}{\dfrac{m_0 v^2}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Z kinetické energie před reakcí se využije 50 % na kinetickou energii po reakci a 50 % na efektivní energii dostupnou v těžišti nezávisle na hodnotě rychlosti v (v rámci nerelativistického řešení).

2 body

b) Kinetická energie soustavy před reakcí (vzhledem k laboratorní soustavě) je opět

$$E_{\mathrm{k}i} = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Kinetická energie soustavy po reakci je

$$E_{\mathrm{k}f} = \frac{1}{2}\left(m_0 + k m_0\right)u^2 = \frac{m_0 u^2}{2}\left(k+1\right).$$

Ze zákona zachování hybnosti určíme rychlost u spojených částic

$$m_0 v = \left(m_0 + k m_0\right)u,$$

$$u = \frac{v}{k+1}.$$

Kinetická energie spojených částic je

$$E_{\mathrm{k}f} = \frac{m_0 v^2}{2\left(k+1\right)}.$$

Vyjádříme požadovaný poměr kinetických energií

$$\frac{E_{\mathrm{kf}}}{E_{\mathrm{ki}}} = \frac{\dfrac{m_0 v^2}{2\left(k+1\right)}}{\dfrac{m_0 v^2}{2}} = \frac{1}{k+1}.$$

Podíl kinetické energie po reakci a před reakcí opět nezávisí na rychlosti dopadající částice, ale závisí na k. S rostoucím k podíl klesá k nule $\left(\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k+1} = 0\right)$ a tudíž roste podíl efektivní energie dostupné v těžišti.

2 body

c) Využijeme opět zákony zachování (nyní již s relativistickými hybnostmi a energiemi). Zákon zachování hybnosti

$$p_i = p_f,$$

kde počáteční hybnost p_i je hybnost dopadající částice (projektilu) a p_f je hybnost spojených částic. Zákon zachování energie

$$E_0 + E_{2i} = E_f,$$

kde E_0 je klidová energie terčové částice, $E_{2\mathrm{i}}$ je energie dopadající částice (projektilu) a E_f je energie spojených částic

$$E_f = E_0 + \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \doteq 23{,}366 E_0,$$

$$E_f = 23{,}366 E_0.$$

Obecně mezi hybností p, celkovou energií E a rychlostí platí:

$$p = mv = \left(mc^2\right)\frac{v}{c^2} = E\frac{v}{c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{pc}{E}.$$

Pro rychlost u tak platí:

$$\frac{u}{c} = \frac{p_f c}{E_f} = \frac{p_i c}{E_f} = \frac{\left(E_{2i}\dfrac{v}{c^2}\right)c}{E_f} = \frac{\dfrac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\dfrac{v}{c}}{23{,}366 E_0} = \frac{v}{23{,}366 c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \doteq 0{,}956.$$

Spojené částice mají po srážce rychlost $0{,}956c$. **3 body**

d) Pomocí relativistického vztahu vyjádříme kinetickou energii před reakcí

$$E_{\mathrm{k}i} = E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \doteq 21{,}366 E_0.$$

Kinetickou energii $E_{\mathrm{k}f}$ po reakci vyjádříme jako

$$E_{\mathrm{k}f} = E_f - E_{f0},$$

kde E_f je energie spojených částic (tu jsme již určili v úloze c) a E_{f0} je klidová energie spojených částic (zde také energie dostupná v těžišti)

$$E_{f0} = E_f\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 23{,}366 E_0\sqrt{1-0{,}956^2} \doteq 6{,}836 E_0.$$

Po dosazení

$$E_{\mathrm{k}f} = E_f - E_{f0} = 23{,}366 E_0 - 6{,}836 E_0 = 16{,}530 E_0.$$

Vyjádříme poměr efektivní energie dostupné v těžišti E_{EDT} a počáteční kinetické energie

$$\frac{E_{\mathrm{EDT}}}{E_{\mathrm{k}i}} = \frac{E_{\mathrm{k}i} - E_{\mathrm{k}f}}{E_{\mathrm{k}i}} = \frac{21{,}366E_0 - 16{,}530E_0}{21{,}366E_0} = 0{,}226,$$

neboli 22,6 %.
Při relativistickém řešení pro rychlost $v = 0{,}999c$ připadá na efektivní energii dostupnou v těžišti jen 22,6 % kinetické energie před reakcí.

Poznámka: Pro ještě větší rychlost dopadající částice podíl efektivní energie dostupné v těžišti neustále klesá, proto se používají vstřícné svazky, u nichž se může přeměnit limitně 100 % počáteční kinetické energie na efektivní energii dostupnou v těžišti. **3 body**