Řešení úloh celostátního kola 60. ročníku fyzikální olympiády

Úlohy navrhli J. Thomas (1, 2, 3) a V. Wagner (4)

1. a) Z rovnosti hydrostatických tlaků

$$1{,}5R\rho_1 g = h_1\rho_2 g \Rightarrow h_1 = 1{,}5R\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{8}R = 3{,}75\ \text{cm}.$$

1 bod

b) Označme h_2 výšku kapaliny v pravém rameni. Pak platí:

$$2R\rho_1 g = h_2\rho_2 g \Rightarrow h_2 = 2R\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R}{2}.$$

Rozhraní mezi kapalinami se posune o $d = h_2 - h_1 = \frac{R}{2} - \frac{3}{8}R = \frac{1}{8}R = 1{,}25$ cm.

1 bod

c) Protože setrvačná odstředivá síla, která působí na obě kapaliny ve vodorovné části trubice, závisí na jejich hmotnosti, posune se rozhraní mezi kapalinami doprava. **1 bod**

Při otáčení U-trubice působí na každý element hmotnosti $\mathrm{d}m = S\rho\mathrm{d}r$ setrvačná odstředivá síla, jejíž velikost závisí na vzdálenosti r od osy otáčení

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}m\cdot\omega^2 r = S\rho\mathrm{d}r\cdot\omega^2 r.$$

Celková setrvačná odstředivá síla působící na kapalinu ve vodorovné části trubice nacházející se ve vzdálenosti od r_1 do r_2 od osy otáčení je určena integrálem

$$F = \int_{r_1}^{r_2} S\rho\omega^2 r\mathrm{d}r = S\rho\omega^2\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}.$$

Na vodorovný sloupec kapaliny o délce R a hustotě ρ_1 působí setrvačná odstředivá síla o velikosti $F_{o1} = S\rho_1\omega^2\frac{R^2}{2}$ směrem doleva, **1 bod**

na vodorovný sloupec kapaliny o délce x a hustotě ρ_1 pak působí setrvačná síla o velikosti $F_{o2} = S\rho_1\omega^2\frac{x^2}{2}$ směrem doprava. **1 bod**

Konečně na vodorovný sloupec kapaliny o délce $R - x$ a hustotě ρ_2 setrvačná síla o velikosti $F_{o3} = S\rho_2\omega^2\frac{R^2 - x^2}{2}$ směrem doprava. **1 bod**

Protože hladina v pravé části nádoby o vzdálenost x stoupne a v levé části nádoby o stejnou vzdálenost klesne, musíme vzít v úvahu i změnu hydrostatické tlakové síly.

Hydrostatická tlaková síla působící zleva se sníží o $\Delta F_1 = x\rho_1\mathrm{g}\mathrm{S}$, tlaková síla působící zprava se zvýší o $\Delta F_2 = x\rho_2 gS$. **1 bod**

V rovnováze na rozhraní kapalin nyní bude platit

$$F_{o1} + \Delta F_1 = F_{o2} + F_{o3} - \Delta F_2.$$

Po dosazení a zkrácení

$$\rho_1\omega^2\frac{R^2}{2} - \rho_1\omega^2\frac{x^2}{2} - \rho_2\omega^2\frac{R^2 - x^2}{2} + x\rho_1 g + x\rho_2 g = 0,$$

$$\rho_1\omega^2 R^2 - \rho_1\omega^2 x^2 - \rho_2\omega^2\left(R^2 - x^2\right) + 2xg(\rho_1 + \rho_2) = 0.$$

Úpravou získáme kvadratickou rovnici

$$x^2 + \frac{2xg(\rho_1 + \rho_2)}{\omega^2(\rho_2 - \rho_1)} - R^2 = 0,$$

$$x^2 + 0{,}081\,75x - 0{,}01 = 0.$$

Rovnici vyhovuje kladný kořen $x = 6{,}7$ cm. **3 body**

2. a) Označme vzdálenost pístu od levé základny a, od pravé základny b a výšku válce l. Na počátku děje platí:

$$\frac{y_1}{y} = \frac{b}{a} \tag{1}$$

a po jeho skončení

$$\frac{y_2}{y} = \frac{b_1}{a_1}. \tag{2}$$

Ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$$

a z rovnice $a + b = a_1 + b_1$ zjistíme, že ostrý obraz podruhé vznikne, když bude $a_1 = b \quad a \quad b_1 = a$. Ze vztahů (1) a (2) plyne

$$y^2 = y_1 y_2 \frac{aa_1}{bb_1} = y_1 y_2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{y_1 y_2} = 2{,}0 \text{ cm}.$$

3 body

b) Označme V_1 počáteční objem levé části a V_2 počáteční objem pravé části nádoby, n_1 látkové množství jednoatomového plynu v levé části nádoby a n_2 látkové množství dvouatomového plynu v pravé části nádoby. Pro celkový objem platí

$$V = V_1 + V_2. \tag{3}$$

Protože poměr velikosti obrazu a předmětu je na počátku pokusu 2 : 1 a na konci pokusu 1 : 2 a průřez válce je stálý, je i poměr $\frac{V_2}{V_1} = 2$. V okamžiku vzniku druhého ostrého obrazu na stínítku bude objem levé části nádoby V_2 a pravé části V_1. Protože tlak a teplota v levé i v pravé části nádoby byly na počátku stejné, bude ze stavové rovnice platit

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1} = 2. \tag{4}$$

V pravé části nádoby se plyn izotermicky stlačil, tedy podle Boyle–Mariotteova zákona bude jeho konečný tlak

$$p = p_0 \frac{V_2}{V_1} = p_0 \frac{n_2}{n_1} = k p_0 = 2 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}, \tag{5}$$

stejný tlak bude i v levé části nádoby.

2 body

c) Energie získaná z žárovky se spotřebuje na zvýšení vnitřní energie plynu v levé části nádoby a na práci vnějších sil při izotermickém stlačení v pravé části nádoby s využitím vztahů (3), (4) a (5):

$$Q = \Delta U + W' =$$

$$= \frac{3}{2}\left(pV_2 - p_0 V_1\right) + p_0 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2}\left[k p_0 (V - V_1) - p_0 V_1\right] + p_0 \left(V - V_1\right) \ln k =$$

$$= \frac{3}{2}\left[k p_0 \left(V - \frac{V}{k+1}\right) - p_0 \frac{V}{k+1}\right] + p_0 \left(V - \frac{V}{k+1}\right) \ln k =$$

$$= p_0 V \left[\frac{3}{2}(k-1) + \frac{k \ln k}{k+1}\right] = p_0 V \left[\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \ln 2\right] = 390\ \mathrm{J}.$$

3 body

Pro tepelný výkon žárovky platí

$$P = U \cdot I = \frac{Q}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{Q}{\mathrm{UI}} = \frac{p_0 V}{\mathrm{UI}} \left[\frac{3}{2}(k-1) + \frac{k \ln k}{k+1}\right] =$$

$$= p_0 V \left[\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \ln 2\right] = 310\ \mathrm{s}.$$

2 body

3. a) Teplo se na rezistoru uvolňuje s výkonem $P = \dfrac{U^2}{R} = \dfrac{U^2 S}{\rho l} = \dfrac{U^2 \pi r^2}{\rho l}$. Tento výkon je přímo úměrný velikosti povrchu rezistoru bez podstav a rozdílu teplot mezi rezistorem a okolím $P = \alpha \cdot 2\pi r l \Delta t$. Porovnáním vztahů

$$\Delta t = \frac{U^2 \pi r^2}{\alpha \cdot 2\pi r \rho l^2} = \frac{U^2 r}{\alpha \cdot 2 \rho l^2}.$$

Zvětší-li se rozměry rezistoru dvakrát, bude teplotní rozdíl dvakrát menší, tedy teplota rezistoru bude 5 °C. **2 body**

b) Doba volného pádu tělesa závisí na výšce a na tíhovém zrychlení $\tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.
Tíhové zrychlení závisí na hmotnosti planety a na jejím poloměru

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^2} = G \frac{4}{3} \pi R \rho.$$

Bude-li poloměr planety poloviční, bude tíhové zrychlení dvakrát menší a doba volného pádu ze stejné výšky $\sqrt{2}$krát větší. **2 body**

c) Označme Δt stálý teplotní rozdíl vzduchu a vody, S povrch rybníka, l_t měrné skupenské teplo tání ledu, λ součinitel tepelné vodivosti ledu a ρ jeho hustotu. V daném okamžiku má led tloušťku x a za velmi krátkou dobu $\mathrm{d}\tau$ vznikne na jeho spodním povrchu vrstvička ledu tloušťky $\mathrm{d}x$. Současně se lineární rozložení teplot v ledu předchozí tloušťky x změní na nové lineární rozložení teplot ledu na tloušťce $x + \mathrm{d}x$. Teplo uvolněné při obou procesech odebere vzduch nad jeho povrchem.

$$l_t \mathrm{d}m + S\rho c \frac{\Delta t}{2} \mathrm{d}x = l_t S\rho \mathrm{d}x + S\rho c \frac{\Delta t}{2} \mathrm{d}x = \lambda S \frac{\Delta t}{x} \mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\tau = \frac{l_t \rho}{\lambda \Delta t} x \mathrm{d}x + \frac{\rho c}{2\lambda} x \mathrm{d}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \left(\frac{l_t \rho}{\lambda \Delta t} + \frac{\rho c}{2\lambda} \right) \int_0^h x \mathrm{d}x = \frac{l_t \rho h^2}{2\lambda \Delta t} + \frac{\rho c}{4\lambda} h^2 = k \cdot h^2.$$

Jestliže za 1 den vznikla vrstva o tloušťce h, vznikne za dva dny vrstva o tloušťce $\sqrt{2}h$.
3 body

d) Teplo, které dodává zdroj stálého proudu, slouží k vypařování vody. Označme a šířku, b délku a h počáteční výšku kapalinového tělesa.
Za krátkou dobu $\mathrm{d}t$ se výška x hladiny změní o $\mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}x < 0$) odpařením kapaliny o hmotnosti $\mathrm{d}m = -\rho_k ab\, \mathrm{d}x$. Za stejnou dobu zdroj dodá energii

$$RI^2 \mathrm{d}t = \rho \frac{b}{ax} I^2 \mathrm{d}t = l_v\, \mathrm{d}m = -l_v \rho_k ab\, \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad x \mathrm{d}x = -\frac{\rho I^2}{l_v \rho_k a^2} \mathrm{d}\tau = -k\tau.$$

Integrováním

$$\int_h^{\frac{h}{2}} x \mathrm{d}x = -k \int_0^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{x^2}{2} \right]_h^{\frac{h}{2}} = \frac{h^2}{8} - \frac{h^2}{2} = -k\tau_0 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{8}{3} k\tau_0.$$

Všechna kapalina se vypaří za dobu τ_1:

$$\int_h^0 x \mathrm{d}x = -k \int_0^{\tau_1} \mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{x^2}{2} \right]_h^0 = -\frac{h^2}{2} = -k\tau_1 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{h^2}{2k} = \frac{4}{3}\tau_0 = 13 \text{ min}.$$

Druhá polovina obsahu nádoby se odpaří za dobu

$$\tau_1 - \tau_0 = \frac{h^2}{2k} - \tau_0 = \frac{4}{3}\tau_0 - \tau_0 = \frac{1}{3}\tau_0 = 3{,}3 \text{ min}.$$

3 body

4. a) Z kinetické energie jádra železa určíme s využitím nerelativistických vztahů jeho rychlost

$$E_{\mathrm{k}i} = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 c^2 \left(\frac{v}{c} \right)^2}{2} = \frac{E_0 \left(\frac{v}{c} \right)^2}{2},$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}i}}{E_0}}.$$

Po dosazení

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot 280{,}0 \text{ MeV}}{(57{,}933\ 274 \cdot 931{,}494\ 095 - 26 \cdot 0{,}510\ 999) \text{ MeV}}} = 0{,}101\,9.$$

Rychlost dopadajících jader železa určená nerelativisticky je 0,101 9c. **1 bod**

Při využití relativistických vztahů dostaneme

$$\frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_0 + E_{\mathrm{k}i},$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{E_{\mathrm{k}i}}{E_0}\right)^2}}.$$

Po dosazení:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{280 \text{ MeV}}{(57{,}933\ 274 \cdot 931{,}494\ 095 - 26 \cdot 0{,}510\ 999) \text{ MeV}}\right)^2}} = 0{,}101\,5.$$

Rychlost dopadajících jader železa určená relativisticky je 0,101 5c.

2 body

b) Výšku coulombovské bariéry E_C získáme ze vztahu (viz studijní text př. 8):

$$E_C = \alpha \frac{Z_{\mathrm{Fe}} Z_{\mathrm{Pb}} \hbar c}{R_0 \left(\sqrt[3]{A_{\mathrm{Fe}}} + \sqrt[3]{A_{\mathrm{Pb}}}\right)}.$$

Po dosazení:

$$E_C = \frac{1}{137} \frac{26 \cdot 82 \cdot 197{,}3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1{,}3 \text{ fm} \left(\sqrt[3]{58} + \sqrt[3]{208}\right)} = 241 \text{ MeV}.$$

Kinetická energie atomů železa je 280,0 MeV a je tedy vyšší než coulombovská bariéra.

2 body

c) Vypočteme klidové energie:

$$E_0\left({}^{58}_{26}\mathrm{Fe}\right) = 57{,}933\,274 \cdot 931{,}494\,095 \text{ MeV} - 26 \cdot 0{,}510\,999 \text{ MeV} = 53\,951{,}217 \text{ MeV},$$

$$E_0\left({}^{208}_{82}\mathrm{Pb}\right) = 207{,}976\,652 \cdot 931{,}494\,095 \text{ MeV} - 82 \cdot 0{,}510\,999 \text{ MeV} = 193\,687{,}121 \text{ MeV},$$

$$E_0\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right) = 266{,}130\,045 \cdot 931{,}494\,095 \text{ MeV} - 108 \cdot 0{,}510\,999 \text{ MeV} = 247\,843{,}378 \text{ MeV}.$$

Energie reakce je pak

$$Q = \left[\left(A_r\left({}^{58}_{26}\mathrm{Fe}\right) + A_r\left({}^{208}_{82}\mathrm{Pb}\right)\right) - A_r\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right)\right] \cdot m_u c^2$$

Po dosazení:

$$Q = [(57{,}933\ 274 + 207{,}976\ 652) - 266{,}130\ 045] \cdot\ 931{,}494\ 095 \text{ MeV} = \\ = -205{,}040 \text{ MeV}.$$

Pro sloučení jader platí zákon zachování energie

$$E_{\mathrm{k}i} + Q = E_{\mathrm{k}f} + E_x,$$

kde E_x je excitační energie složeného jádra.

Vzhledem k tomu, že na pravé straně rovnice jsou dvě neznámé veličiny, použijeme ještě zákon zachování hybnosti. Protože klidová energie jádra železa je řádu 10^4 MeV a jeho kinetická energie řádu 10^2 MeV, použijeme nerelativistický vztah mezi hybností a kinetickou energií.

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{p^2}{2m_0} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2m_0 E_{\mathrm{k}}} = \frac{\sqrt{2E_0 E_{\mathrm{k}}}}{c}.$$

Zákon zachování hybnosti pro naši reakci bude mít tvar:

$$p_i = p_f \Rightarrow p_i \left({}^{58}_{26}\mathrm{Fe}\right) = p_f \left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}^*\right),$$

$$\frac{\sqrt{2E_0\left({}^{58}_{26}\mathrm{Fe}\right) E_{\mathrm{k}i}}}{c} = \frac{\sqrt{2E_0^*\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right) E_{\mathrm{k}f}}}{c},$$

$$E_0\left({}^{58}_{26}\mathrm{Fe}\right) E_{\mathrm{k}i} = E_0^*\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right) E_{\mathrm{k}f} \doteq E_0\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right) E_{\mathrm{k}f}.$$

V rovnici jsme využili poznatek, že klidové energie jádra hassia v základním a v excitovaném stavu si jsou téměř rovny.

Z rovnice vyjádříme $E_{\mathrm{k}f}$

$$E_{\mathrm{k}f} = \frac{E_0\left({}^{58}_{26}\mathrm{Fe}\right) E_{\mathrm{k}i}}{E_0\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right)}$$

a dosadíme do zákona zachování energie

$$E_x = E_{\mathrm{k}i} + Q - \frac{E_0\left({}^{58}_{26}\mathrm{Fe}\right) E_{\mathrm{k}i}}{E_0\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right)} = E_{\mathrm{k}i}\left(1 - \frac{E_0\left({}^{58}_{26}\mathrm{Fe}\right)}{E_0\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right)}\right) + Q.$$

Po dosazení

$$E_x = 280{,}0\ \mathrm{MeV}\left(1 - \frac{53\,951{,}217\ \mathrm{MeV}}{247\,843{,}378\ \mathrm{MeV}}\right) + (-205{,}040\ \mathrm{MeV}) = 14{,}0\ \mathrm{MeV}$$

Excitační energie jádra hassia je 14,0 MeV. **4 body**

d) Rychlost jádra hassia určíme z jeho kinetické energie.

$$E_{\mathrm{k}f} = \frac{53\,951{,}217\ \mathrm{MeV} \cdot 280{,}0\ \mathrm{MeV}}{247\,843{,}378\ \mathrm{MeV}} = 61{,}0\ \mathrm{MeV},$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{k}f}}{E_0\left({}^{266}_{108}\mathrm{Hs}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 61{,}0\ \mathrm{MeV}}{247\,843{,}378\ \mathrm{MeV}}} = 0{,}022\ 2.$$

Rychlost jádra hassia je 0,022 2c. **1 bod**