**Řešení úloh 1. kola 60. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 4, 5, 7), M. Jarešová (6)

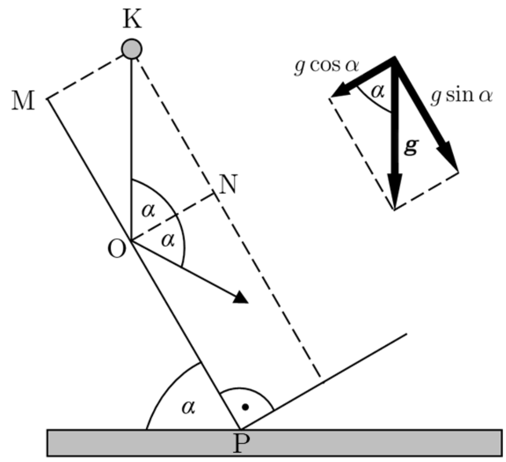
**1.** a) Protože vzdálenost bodů K a O je $\dfrac{h}{\cos\alpha}$, je doba letu kuličky z bodu K do bodu O

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}}.$$

Na levou rovinu kulička dopadne rychlostí o velikosti

$$v_0 = \sqrt{\frac{2hg}{\cos\alpha}} \qquad (1)$$

pod úhlem $\alpha$ a odrazí se rychlostí o stejné velikosti a pod stejným úhlem. Číselně: $t_0 = 0{,}29$ s, $v_0 = 2{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.




Obr. R1

**4 body**

b) Kulička se pohybuje volným pádem a od levé roviny se odrazí v bodě O. Zvolme nyní vztažnou soustavu s počátkem v bodě O a s osami $x = \mathrm{OP}$ a $y = \mathrm{ON}$. Složky tíhového zrychlení do těchto směrů jsou $g\sin\alpha$ ve směru osy OP a $g\cos\alpha$ proti směru osy ON. Pohyb kuličky nyní můžeme popsat rovnicemi:

$$x = v_0 t_1 \sin\alpha + \frac{1}{2} g\sin\alpha\cdot t_1^2, \qquad (2)$$

$$y = v_0 t_1 \cos\alpha + \frac{1}{2} g\cos\alpha\cdot t_1^2 \qquad (3)$$

Označme $t_1$ čas měřený od okamžiku odrazu v bodě O do okamžiku dopadu na pravou desku. Kulička na ni dopadne do místa o souřadnicích $[x_1; y_1]$, kde $x_1 = |\mathrm{OP}| = l - h\,\mathrm{tg}\alpha$. Dosazením $x = x_1$, $t = t_1$ a vztahu (1) do rovnice (2) dostáváme po úpravě kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2} g\sin\alpha t_1^2 + \sin\alpha\sqrt{\frac{2hg}{\cos\alpha}}t_1 - l + h\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$$

s kořeny: $t_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{2hg\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha} \pm \sqrt{2hg\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha - 2g\sin\alpha(h\,\mathrm{tg}\,\alpha - l)}}{g\sin\alpha} =$

$$-\sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}} \pm \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}},$$

kde fyzikální smysl má jen kladný kořen. Celková doba letu kuličky je pak $t = t_0 + t_1 = \sqrt{\dfrac{2l}{g\sin\alpha}} = 0{,}49$ s.

**3 body**

Ke stejnému výsledku bychom mohli dojít i jednodušeji. Zvolíme-li vztažnou soustavu s počátkem v bodě M, pak se ve směru KN pohybuje kulička rovnoměrně zrychleně se zrychlením $g\sin\alpha$ a protože se složka rychlosti připadající do tohoto

směru při odrazu na levé desce nezmění, můžeme napsat pro dobu letu kuličky přímo $t = \sqrt{\dfrac{2l}{g\sin\alpha}}$ .
Nyní určíme zbývající souřadnici místa dopadu dosazením $y = y_1$, $t = t_1$ a vztahu (1) do rovnice (3):

$$y_1 = \sqrt{\frac{2hg}{\cos\alpha}}\left(-\sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}}\right)\cos\alpha+$$

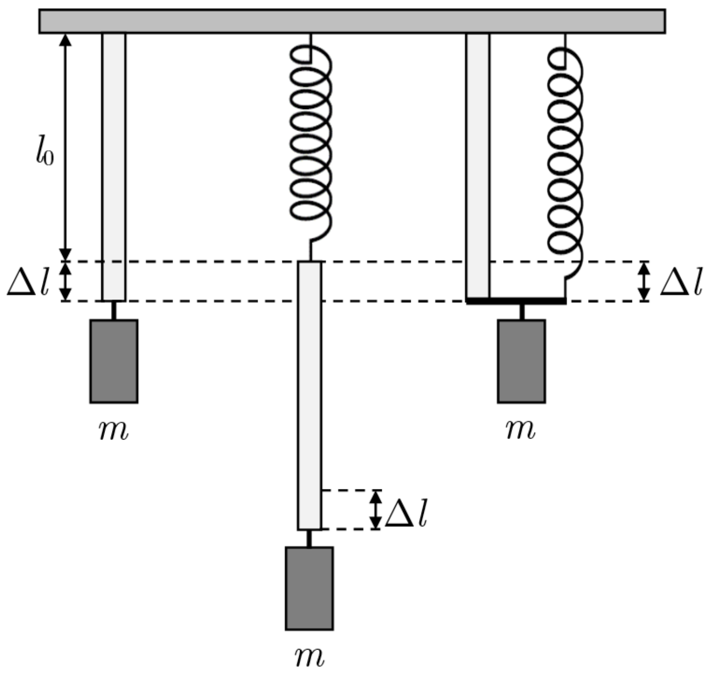
$$+\frac{1}{2}g\cos\alpha\left(-\sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}}\right)^2 = -h+\frac{l}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Vzdálenost místa dopadu kuličky od spojující hrany je

$$d = y_1 = \frac{l}{\operatorname{tg}\alpha} - h = 0{,}38\ \text{m}.$$

**3 body**

**2.**a)

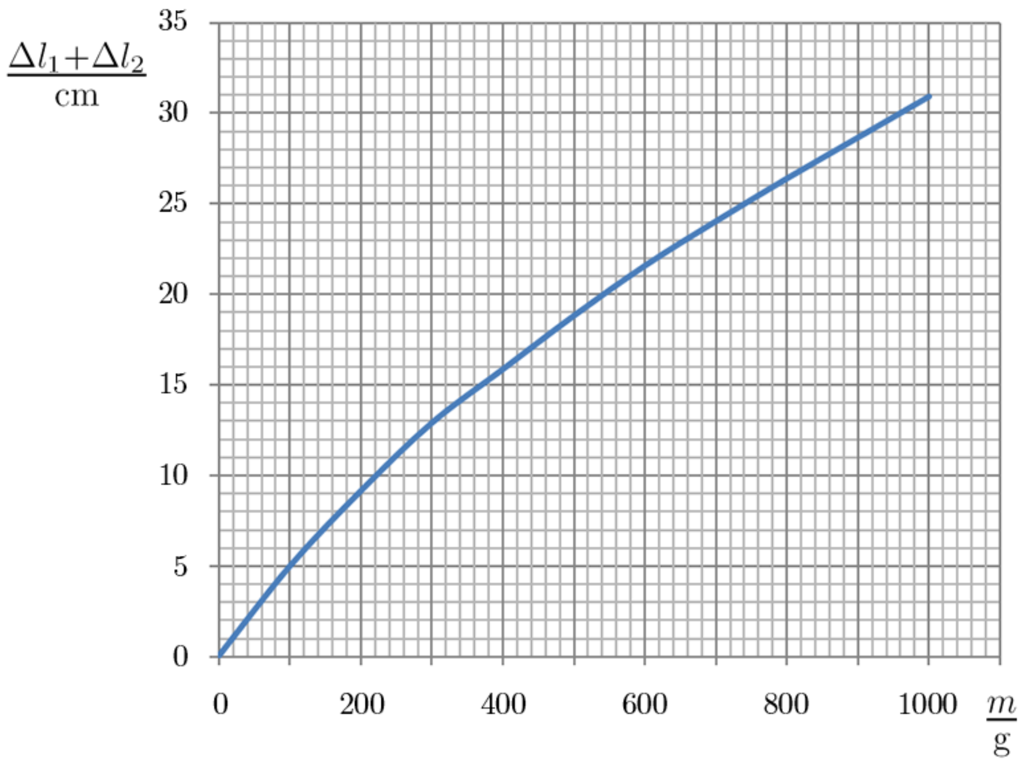



Obr. R2

Guma i pružina se prodlužují. Prodloužení gumy odečteme z grafu, prodloužení pružiny vypočítáme ze vztahu $\Delta l_2 = \dfrac{mg}{k}$. Jejich součet je celkové prodloužení soustavy.

| $\frac{m}{\text{g}}$ | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\Delta l_1}{\text{cm}}$ | 0 | 3,0 | 5,2 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 9,8 | 10,3 | 10,7 | 11,0 | 11,3 |
| $\frac{\Delta l_2}{\text{cm}}$ | 0 | 2,0 | 3,9 | 5,9 | 7,8 | 9,8 | 11,8 | 13,7 | 15,7 | 17,7 | 19,6 |
| $\frac{\Delta l_1+\Delta l_2}{\text{cm}}$ | 0 | 5,0 | 9,1 | 12,9 | 15,8 | 18,8 | 21,6 | 24,0 | 26,4 | 28,7 | 30,9 |

Graf závislosti prodloužení soustavy na hmotnosti zavěšeného závaží je na obrázku R3.




Obr. R3

**4 body**

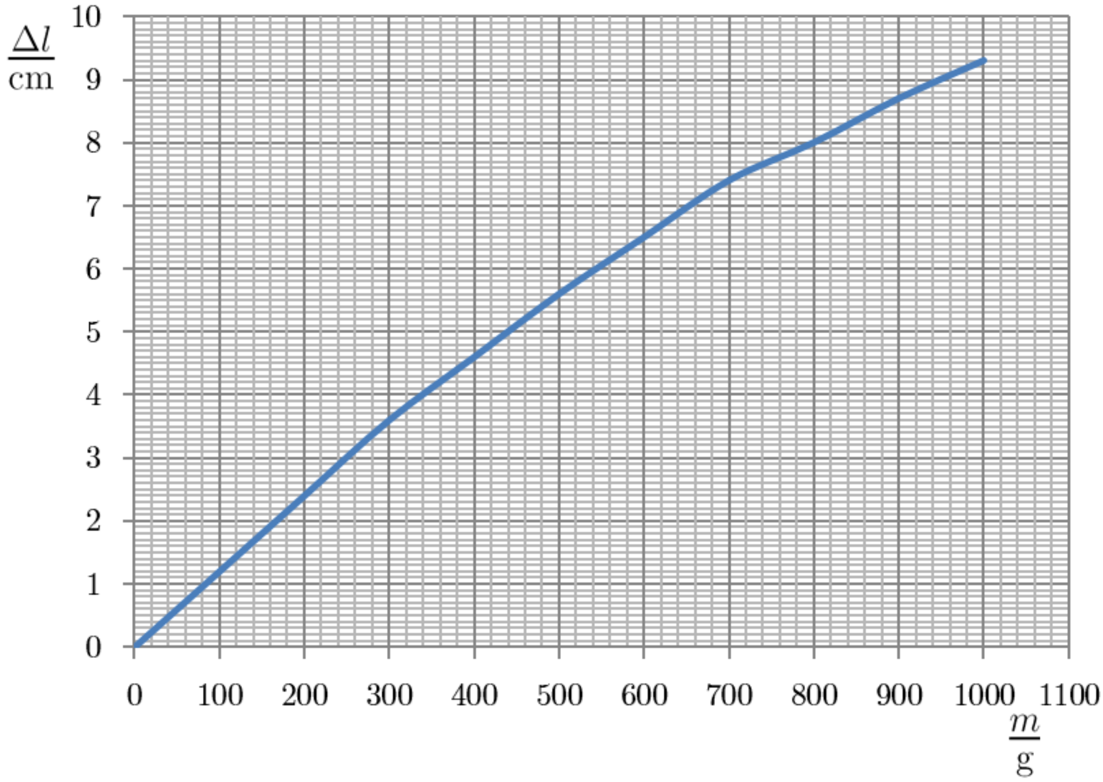
b) Budou-li pružina a guma zavěšeny vedle sebe, rozloží se tíha závaží na gumu a pružinu: $mg = F_1 + F_2$, přičemž prodloužení gumy i pružiny jsou stejná. U pružiny je síla přímo úměrná jejímu prodloužení $F_2 = k\Delta l$. Označme $m_1$ část hmotnosti, kterou „nese" guma. Použijeme graf ze zadání, kde na vodorovné ose budou tentokrát hodnoty hmotnosti $m_1$ odpovídající zatížení gumy v soustavě. Závislost prodloužení pružiny $\Delta l$ na hmotnosti $m_1$ při zvoleném celkovém zatížení soustavy závažím o hmotnosti m pak určuje lineární funkce daná vztahem

$$\Delta l = \frac{(m - m_1)\, g}{k}. \tag{1}$$

Nyní zvolíme hmotnost $m$ celkového zatížení soustavy a pro tuto hmotnost sestrojíme graf závislosti (1) s definičním oborem $m_1 \in \langle 0; m\rangle$. Pro $m_1 = 0$ je guma nezatížená a výchylka pružiny je maximální $\Delta l = \dfrac{mg}{k}$. Pro $m_1 = m$ je guma zatížena maximálně a výchylka pružiny je nulová. Příslušné body $\left[0; \dfrac{mg}{k}\right]$ a $[m; 0]$ vyneseme do grafu a spojíme přímkou. Průsečík přímky s křivkou původního grafu určuje společné prodloužení $\Delta l$ pro hmotnost $m$ celkového zatížení zobrazené průsečíkem přímky s vodorovnou osou. Postup opakujeme volbou dalších hodnot hmotnosti $m$. Dvojice hodnost $m$ a $\Delta l$ zaznamenáme do tabulky:

| $\frac{m}{\text{g}}$ | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\Delta l}{\text{cm}}$ | 0 | 1,2 | 2,4 | 3,6 | 4,6 | 5,6 | 6,5 | 7,4 | 8,0 | 8,7 | 9,3 |

Podle tabulky sestrojíme graf:




Obr. R4

**6 bodů**

Tabulku je možné získat i bez grafu pouze početně. Budeme volit prodloužení $\Delta l$ soustavy a dopočítávat hmotnost $m$ závaží. Zvolme např. $\Delta l = 6$ cm. Toto prodloužení samotné gumy způsobí podle grafu v zadání závaží o hmotnosti $m_1 = 240$ g a toto stejné prodloužení samotné pružiny způsobí závaží o hmotnosti $m_2 = \frac{k\Delta l}{g} = \frac{50 \cdot 0{,}06}{9{,}81}$ kg $= 306$ g. Celková hmotnost závaží zatěžující soustavu s prodloužením $\Delta l = 6$ cm je $m = m_1 + m_2 = 546$ g.

| $\frac{m}{\mathrm{g}}$ | 0 | 83 | 164 | 253 | 344 | 445 | 546 | 657 | 808 | 959 | 1 140 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\Delta l}{\mathrm{cm}}$ | 0 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |

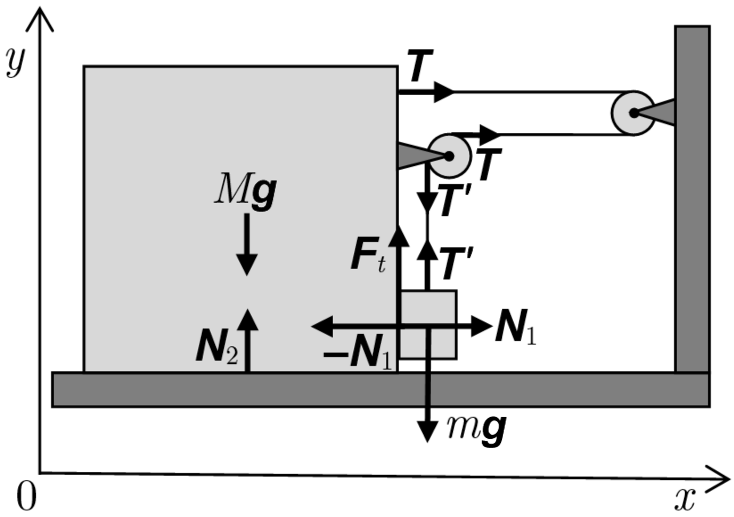
**3.**a) Obě tělesa se budou pohybovat, velké těleso směrem doprava. Protože je hmotnost kladek zanedbatelná, je silou stejné velikosti $T' = T$ napínána nit mezi kladkami a mezi horní kladkou a velkým tělesem. Všechny působící síly nakreslíme do obrázku R5.

Na velké těleso působí ve vodorovném směru dvakrát tah niti $2T$ směrem doprava a reakce $N$ mezi ním a malým tělesem směrem doleva. S označením zrychlení velkého tělesa $a_x$ zapíšeme pohybovou rovnici:

$$Ma_x = 2T - N. \tag{1}$$

Na malé těleso působí ve vodorovném směru pouze reakce $N$ směrem doprava. Přitom se ve vodorovném směru pohybuje se stejným zrychlením jako velké těleso:

$$ma_x = N. \tag{2}$$




Obr. R5

Ve svislém směru působí na malé těleso tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ směrem dolů a dále tah vlákna $T$ a třecí síla $F_t = fN$ směrem vzhůru. S kladnou orientací svislé osy $y$ směrem vzhůru dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$ma_y = -mg + T + fN. \tag{3}$$

Posune-li se soustava o vzdálenost $s$ ve vodorovném směru, poklesne malé těleso o $2s$ ve svislém směru. S uvážením orientace os $x$ a $y$ dostáváme odtud

$$a_y = -2a_x. \tag{4}$$

Vztahy (1-4) představují úplnou soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé $a_x$, $a_y$, $T$ a $N$. **8 bodů**

b) Ze soustavy určíme

$$T = \frac{(M+m)\,mg}{M + (5+2f)\,m}.$$

Složky zrychlení malého tělesa jsou $a_x = \dfrac{2mg}{M + (5+2f)\,m}$, $a_y = -2a_x$. Malé těleso se pohybuje s celkovým zrychlením

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{2\sqrt{5}\,mg}{M + (5+2f)\,m},$$

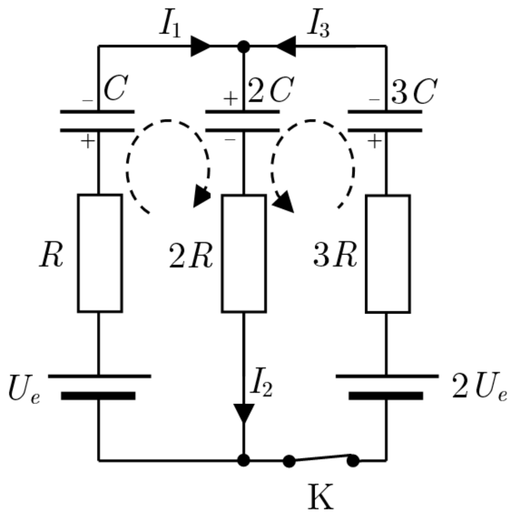
které se svislým směrem svírá úhel

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 26{,}6°.$$ **2 body**

**4.**a) Kondenzátory $C$ a $2C$ jsou ke zdroji připojeny sériově, náboje na kondenzátorech jsou stejné. Platí $CU_C = 2CU_{2C}$ a také $U_C + U_{2C} = U_e \quad\Rightarrow\quad U_C = \dfrac{2}{3}U_e$, a $U_{2C} = \frac{1}{3}U_e$. **2 body**

b) Do schématu, které znázorňuje situaci krátce po sepnutí klíče, zvolíme v jednotlivých větvích směry proudů $I_1$, $I_2$, $I_3$ a v levém a v pravém obvodu směry obíhání. Vzhledem k této volbě sestavíme podle Kirchhoffových zákonů soustavu rovnic, přičemž pro znaménka napětí na kondenzátorech použijeme stejné pravidlo jako pro znaménka napětí zdrojů:

$$I_1 + I_3 = I_2, \qquad (1)$$
$$U_e - U_C - U_{2C} = RI_1 + 2RI_2, \qquad (2)$$
$$2U_e - U_{3C} - U_{2C} = 3RI_3 + 2RI_2. \qquad (3)$$



Obr. R6

Hodnota proudů bude největší v okamžiku zapnutí spínače, kdy na kondenzátoru s kapacitou $3C$ je nulové napětí a na kondenzátorech s kapacitou $C$ a $2C$ jsou původní napětí.

Po dosazení do soustavy (1-3) za $U_C = \frac{2}{3}U_e$, $U_{2C} = \frac{1}{3}U_e$ a $U_{3C} = 0$ dostaneme rovnice

$$I_1 + I_3 = I_2$$
$$0 = RI_1 + 2RI_2$$
$$\frac{5}{3}U_e = 3RI_3 + 2RI_2$$

z nichž po eliminací proměnných $I_1$ a $I_3$ obdržíme $I_2 = \frac{5U_e}{33R}$. **4 body**

c) Po vyrovnání nábojů na kondenzátorech proud v obvodu ustane. Pro tento případ přepíšeme rovnice (2) a (3):

$$U_e = U_C + U_{2C}$$
$$2U_e = U_{3C} + U_{2C}$$

Doplníme ještě podmínku $Q_1 + Q_3 = Q_2$:

$$CU_C + 3CU_{3C} = 2CU_{2C}.$$

Z této soustavy tří rovnic pro tři neznámé $U_C$, $U_{2C}$ a $U_{3C}$ určíme $U_C = -\frac{1}{6}U_e$. Napětí má opačnou polaritu než před sepnutím klíče. To znamená, že proud $I_1$ musel téci vzhledem k naší volbě v opačném směru (ze soustavy rovnic skutečně vychází proud $I_1$ záporný).

**4 body**

**5.**a) Orientujme osu $x$ rovnoběžně s deskami a osu $y$ kolmo k deskám kondenzátoru tak, aby počáteční složky rychlosti protonu ve směru os byly $v_{0x} = v\cos\alpha$ a $v_{0y} = v\sin\alpha$. Jelikož se $x$-ová složka rychlosti protonu při jeho pohybu v el. poli nemění, bude doba jeho průletu mezi deskami kondenzátoru

$$t = \frac{l}{v_{0x}} = \frac{l}{v\cos\alpha} = 5{,}8\cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

**3 body**

b) Během průletu kondenzátorem působí na proton síla $F = QE$, orientovaná k záporně nabité desce, která mu uděluje zrychlení $a_y = \pm\dfrac{QE}{m}$, přičemž volba znaménka je dána orientací síly vzhledem k ose $y$. Velikost $y$-ové složky rychlosti protonu při jeho výstupu z kondenzátoru bude

$$v_y = v_{0y} + a_y t = v\sin\alpha \pm \frac{QE}{m}\cdot\frac{l}{v\cos\alpha}.$$

V závislosti na orientaci síly dostáváme pro velikost rychlosti $v$ protonu dvě možné hodnoty

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{v^2\cos^2\alpha + \left(v\sin\alpha + \frac{QE}{m}\cdot\frac{l}{v\cos\alpha}\right)^2} = 1{,}2\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{v^2\cos^2\alpha + \left(v\sin\alpha - \frac{QE}{m}\cdot\frac{l}{v\cos\alpha}\right)^2} = 8{,}8\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Výsledná rychlost svírá s deskami úhel $\beta$, pro který platí

$$\mathrm{tg}\ \beta_1 = \frac{v_{1y}}{v_x} = \frac{v\sin\alpha + \dfrac{QE}{m}\,\dfrac{l}{v\cos\alpha}}{v\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad \beta_1 = 44^\circ,$$

$$\mathrm{tg}\ \beta_2 = \frac{v_{2y}}{v_x} = \frac{v\sin\alpha - \dfrac{QE}{m}\,\dfrac{l}{v\cos\alpha}}{v\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad \beta_2 = 11^\circ.$$

**4 body**

c) Proton se ve směru osy $y$ posune o vzdálenost $d = v_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2}$. Po dosazení

$$d_1 = v\sin\alpha\cdot\frac{l}{v\cos\alpha} + \frac{1}{2}\frac{QE}{m}\left(\frac{l}{v\cos\alpha}\right)^2 = l\cdot\mathrm{tg}\ \alpha + \frac{1}{2}\frac{QE}{m}\frac{l^2}{v^2\cos^2\alpha} = 3{,}8\ \mathrm{cm},$$

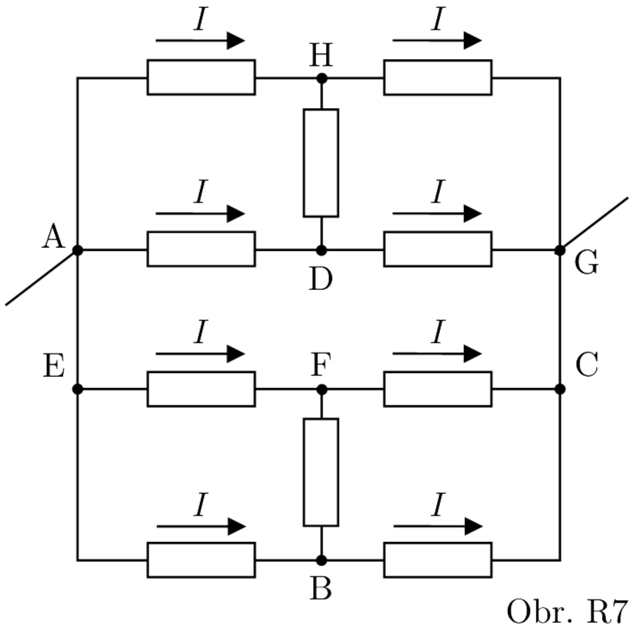
$$d_2 = v\sin\alpha\cdot\frac{l}{v\cos\alpha} - \frac{1}{2}\frac{QE}{m}\left(\frac{l}{v\cos\alpha}\right)^2 = l\cdot\mathrm{tg}\ \alpha - \frac{1}{2}\frac{QE}{m}\frac{l^2}{v^2\cos^2\alpha} = 1{,}9\ \mathrm{cm}.$$

**3 body**

**7.** a, b) Náhradní schéma s 10 rezistory (obr. R7). Ze schématu vidíme, že rezistory mezi body H a D a mezi body F a B proud neprochází. Proto je celkový odpor mezi body A a G roven $R_{AG} = 2R$.

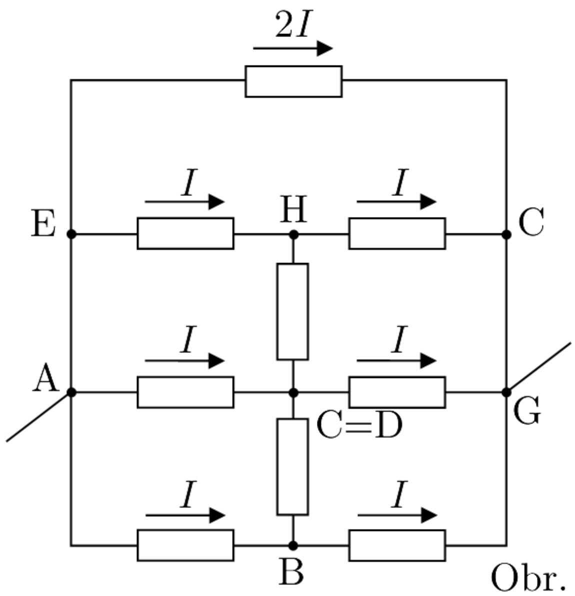
Přívodními vodiči pak prochází proud $4I = 8$ A.

**4 body**



Obr. R7

c, d) Nakreslíme náhradní schéma s devíti rezistory:



Obr. R8

Mezi body H a D a mezi body B a C proud neprochází, proto je můžeme vynechat. Celkový odpor bude roven $R_AG = \frac{2}{5}R$. Přívodními vodiči bude procházet proud $5I = 10$ A. **4 body**

e) Mezi body A a E bude v prvním případě procházet proud $2I = 4$ A, ve druhém případě to bude proud $3I = 6$ A. **2 body**