Řešení úloh 1. kola 60. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 4, 5, 7), J. Kalčík (6)

1.a) Karel převeze Luboše za dobu $t_1 = \dfrac{s}{3v_0}$. Pak se vrátí pro Michala. Dobu jízdy Karla do jejich setkání označíme t_2. Platí $s = v_0\,(t_1 + t_2) + 4v_0t_2$. Po dosazení za t_1 dostaneme

$$s = v_0\,(t_1 + t_2) + 4v_0t_2 = \frac{s}{3} + v_0t_2 + 4v_0t_2 = \frac{s}{3} + 5v_0t_2 \quad\Rightarrow\quad t_2 = \frac{2s}{15v_0}.$$

Přitom Karel ujel vzdálenost $s_2 = 4v_0t_2 = \dfrac{8}{15}s$. Stejnou vzdálenost musí ujet nazpět s Michalem. Potrvá mu to dobu $t_3 = \dfrac{s_2}{3v_0} = \dfrac{8s}{45v_0}$. Celková doba výletu bude

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{8}{45}\right)\frac{s}{v_0} = \frac{29}{45}\frac{s}{v_0} = 2{,}8\ \text{h}.$$

4 body

b) Má-li být doba výletu co nejkratší, musí všichni dorazit do cíle cesty ve stejnou dobu a přitom musí být po celou cestu všichni v pohybu. Proto Karel doveze Luboše jen do takové vzdálenosti x od bodu A, aby se mohl vrátit pro Michala, který jde mezitím pěšky, vzal ho na kolo a dorazil do místa B stejně s Lubošem. Potřebuje na to dobu $t_{\mathrm{KL}} = \dfrac{x}{3v_0}$. Zbytek cesty jde Luboš sám a do bodu B dojde za dobu $t_{\mathrm{L}} = \dfrac{s-x}{v_0}$. Celková doba výletu tedy bude

$$t = t_{\mathrm{KL}} + t_{\mathrm{L}} = \frac{x}{3v_0} + \frac{s-x}{v_0} = \frac{3s-2x}{3v_0}. \tag{1}$$

Zbývá nám určit vzdálenost x. Protože se Michal s Karlem pohybují nyní proti sobě, platí

$$x = v_0\,(t_{\mathrm{KL}} + \tau) + 4v_0\tau = \frac{x}{3} + 5v_0\tau.$$

K jejich setkání dojde za dobu $\tau = \dfrac{2}{15}\dfrac{x}{v_0}$. Karel přitom ujel vzdálenost $x_1 = 4v_0\tau = \dfrac{8}{15}x$.

Celková doba jízdy Karla při návratu pro Michala a jízda s Michalem do bodu B musí být stejná, jako doba pěší chůze Luboše

$$\frac{s-x}{v_0} = \tau + \frac{x_1 + s - x}{3v_0} = \frac{2}{15}\frac{x}{v_0} + \frac{\frac{8}{15}x + s - x}{3v_0} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad s - x = \frac{2}{15}x + \frac{8}{45}x + \frac{s}{3} - \frac{x}{3} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{15}{22}s = 15\ \text{km}.$$

Po dosazení do rovnice (1)

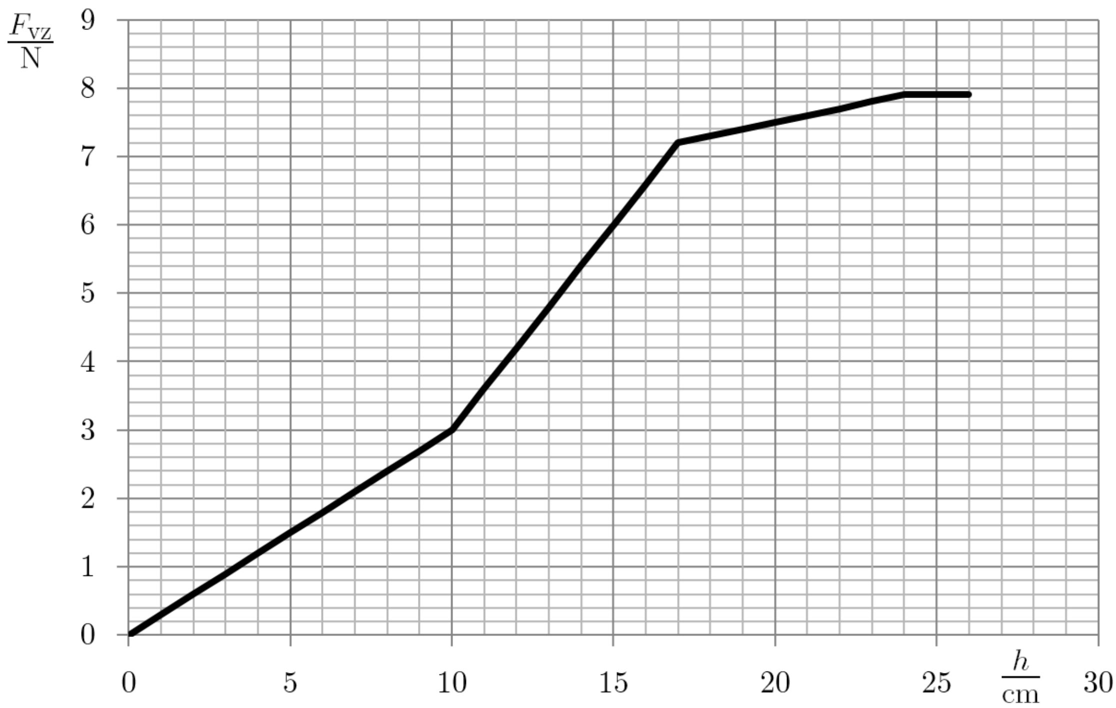
$$t = \frac{3s - 2x}{3v_0} = \frac{s - \frac{2}{3}x}{v_0} = \frac{12s}{22v_0} = 2{,}4\ \text{h}.$$

Aby doba jízdy byla co nejkratší, musí Karel Luboše vysadit ve vzdálenosti 15 km od bodu A.

6 bodů

2.a) Řešení: Sestavíme tabulku závislosti vztlakové síly na hloubce ponoru a sestrojíme graf:

$\frac{h}{\text{cm}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{F_{\text{vz}}}{\text{N}}$	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3,0	3,6	4,2	4,8
$\frac{h}{\text{cm}}$	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
$\frac{F_{\text{vz}}}{\text{N}}$	5,4	6,0	6,6	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	7,9	7,9	



Obr. R1

3 body

Z grafu nebo z tabulky můžeme odečíst, že spodní válec má výšku $h_1 = 10$ cm, prostřední válec má výšku $h_2 = 7$ cm a horní válec má výšku $h_3 = 7$ cm. Protože se vztlaková síla mění nejpomaleji při ponořování horního válce, je právě tento válec nejužší, tedy jeho průřez je $S = 10\ \text{cm}^2$. U spodního válce se vztlaková síla mění třikrát rychleji, než u horního válce, spodní válec má tedy průřez $3S = 30\ \text{cm}^2$. U prostředního válce se vztlaková síla mění $6\times$ rychleji, než u horního válce, má tedy tento válec průřez $6S = 60\ \text{cm}^2$. **3 body**

Hustotu kapaliny určíme z definice vztlakové síly:

$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho_{\mathrm{k}}g \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathrm{k}} = \frac{F_{\mathrm{vz}}}{Vg}.$$

Dosadit můžeme například velikost vztlakové síly při ponoření spodního válce

$$\rho_{\mathrm{k}} = \frac{3{,}0}{30\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}1\cdot 9{,}81}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1\,020\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\ .$$

2 body

Hustotu materiálu válců určíme z hmotnosti a celkového objemu:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{F_G}{g}}{3S\cdot h_1 + 6S\cdot h_2 + S\cdot h_3} = \frac{F_G}{gS(3h_1 + 6h_2 + h3)} =$$

$$= \frac{\frac{61{,}6}{9{,}81}}{30\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}1 + 60\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}07 + 10\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}07}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 7\,900\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

2 body

3.a) Označme ω_{Z} úhlovou rychlost otáčení Země kolem osy a ω úhlovou obíhání družice. Za dobu jednoho obletu družice $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se Země pootočí o úhel $\frac{2\pi}{\omega}\omega_Z$. Obíhá-li družice ve stejném směru jako se otáčí Země, bude její další poloha nad rovníkem posunuta západně o zeměpisnou délku

$$\Delta\varphi = \pi - \pi\frac{\omega_Z}{\omega} = \pi\left(1 - \frac{\omega_Z}{\omega}\right). \tag{1}$$

Obíhá-li družice v opačném směru, než je otáčení Země, bude další poloha nad rovníkem posunuta východně o zeměpisnou délku

$$\Delta\varphi = \pi + \pi\frac{\omega_Z}{\omega} = \pi\left(1 + \frac{\omega_Z}{\omega}\right). \tag{2}$$

Obíhá-li naše družice ve směru pohybu Země, bude nad rovníkem znovu po otočení o 140°.
Protože $140° = \frac{7}{9}\pi$ můžeme z rovnice (1) určit periodu otáčení družice

$$\frac{7}{9}\pi = \pi - \pi\frac{\omega_Z}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{9}{2}\omega_Z,$$

$$T = \frac{2}{9}T_Z = 5{,}3\ \mathrm{h}.$$

Kdyby naše družice obíhala ve stejném směru, jakým se otáčí Země, dospěli bychom ke stejnému výsledku z rovnice (2), kde $\varphi = 220° = \frac{11}{9}\pi$. **3 body**

b) Gravitační síla je silou dostředivou

$$G\frac{mM_Z}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{GM_ZT^2}{4\pi^2}} = 1{,}6\cdot 10^7\ \mathrm{m}.$$

2 body

Družice obíhá rychlostí

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi\sqrt[3]{\frac{GM_Z}{4\pi^2 T}} = 5{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

c) Úhlová rychlost druhé družice je $\omega_1 = \dfrac{\omega}{2} = \dfrac{9}{4}\omega_Z$. Obíhá-li družice proti směru pohybu Země, pak z rovnice (2)

$$\Delta\varphi = \pi\left(1 + \frac{\omega_Z}{\omega}\right) = \pi\left(1 + \frac{4}{9}\right) = \frac{13}{9}\pi.$$

Úhlová vzdálenost bodů nad rovníkem bude 260° východním směrem (resp. 100° západním směrem).
Kdyby družice obíhala ve stejném směru, jako se otáčí Země, z rovnice (1) bychom dostali

$$\Delta\varphi = \pi\left(1 - \frac{\omega_Z}{\omega}\right) = \pi\left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9}\pi,$$

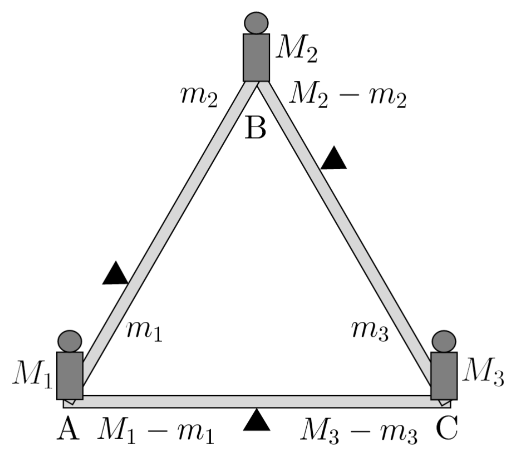
tedy stejný výsledek. Protože má druhá družice poloviční úhlovou rychlost, je její perioda oběhu dvojnásobná:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{9}{4}\omega_Z} = \frac{4}{9}T_Z = 2T,$$

poloměr oběžné dráhy bude $r_1 = r\sqrt[3]{4} = 2{,}5 \cdot 10^7$ m a obvodová rychlost $v_1 = \dfrac{2\pi r\sqrt[3]{4}}{2T} = v\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} = 4{,}0.10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

3 body

4.a) Jestliže z hmotnosti závaží M_1 připadá na páku AB část m_1, na páku AC pak část hmotnosti $M_1 - m_1$. Jestliže z hmotnosti závaží M_2 připadá na páku AB část m_2, pak na část BC připadá hmotnost $M_2 - m_2$. Jestliže z hmotnosti M_3 připadá na páku BC část m_3, pak na část AC připadá $M_3 - m_3$. V matematické části řešení budeme pro jednoduchost chápat pod označením hmotností pouze číselné hodnoty veličiny hmotnost v kilogramech. Vzhledem k postavení podpěr pak bude platit (obr. R2):



Obr. R2

$$\{m_1\} = 2\{m_2\}, \tag{1}$$

$$8 - \{m_2\} = 2\{m_3\}, \tag{2}$$

$$\{M_3\} - \{m_3\} = 8 - \{m_1\}. \tag{3}$$

Přitom $0 \le \{m_1\} \le 8$, $0 \le \{m_2\} \le 8$.

Z rovnice (1) vidíme, že $\{m_2\} \in \langle 0; 4\rangle$, jinak by hmotnost m_1 byla větší, než 8 kg. Z rovnice (2) vyjádříme $\{m_3\} = \dfrac{8 - \{m_2\}}{2}$ a dosadíme do rovnice (3)

$$\{M_3\} = 8 - \{m_1\} + \{m_3\} = 8 - 2\,\{m_2\} + 4 - \frac{\{m_2\}}{2} = 12 - \frac{5}{2}\,\{m_2\}$$

Po dosazení mezí $\{m_2\}$ dostaneme $\{M_3\} \in \langle 2; 12\rangle$. Závaží umístěné do bodu C tedy může mít hmotnost od 2 kg do 12 kg. **5 bodů**

b) Zvolme v rovině obrázku soustavu souřadnic s počátkem v těžišti, s vodorovnou osou x a svislou osou y. Pak podle momentové věty vzhledem k ose x platí

$$F_{\mathrm{AC}} \cdot \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = F_{\mathrm{BC}} \cdot \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{AC}} = F_{\mathrm{BC}}.$$

Analogicky vzhledem k ose y platí

$$F_{\mathrm{AB}} \cdot \frac{2}{3}\frac{a}{3} = F_{\mathrm{BC}} \cdot \frac{1}{3}\frac{a}{3} \quad \Rightarrow \quad 2F_{\mathrm{AB}} = F_{\mathrm{BC}}.$$

Dosazením do rovnice

$$F_{\mathrm{AB}} + F_{\mathrm{BC}} + F_{\mathrm{AC}} = 3Mg$$

dostaneme

$$F_{\mathrm{AB}} = F_{\mathrm{BC}} = \frac{6}{5}Mg, \;\; F_{\mathrm{AC}} = \frac{3}{5}Mg.$$

5 bodů

5.a) Označme hmotnost vody v kalorimetru m_1, hmotnost jedné součástky m a její objem V. Napíšeme si kalorimetrické rovnice pro oba případy:

$$mc\,(t - t_2) = (m_1 - V\rho_v)c_v\,(t_2 - t_1) = (m_1 - \frac{m}{\rho}\rho_v)c_v\,(t_2 - t_1)\,,$$

$$2mc\,(t - t_3) = (m_1 - 2V\rho_v)c_v\,(t_3 - t_1) = (m_1 - 2\frac{m}{\rho}\rho_v)c_v\,(t_3 - t_1)\,.$$

Rovnice upravíme na tvar

$$\frac{mc}{c_v}\frac{(t - t_2)}{(t_2 - t_1)} = m_1 - \frac{m}{\rho}\rho_v, \tag{1}$$

$$\frac{2mc}{c_v}\frac{(t - t_3)}{(t_3 - t_1)} = m_1 - 2\frac{m}{\rho}\rho_v. \tag{2}$$

Odečtením rovnic dostaneme

$$\frac{mc}{c_v}\left[\frac{(t - t_2)}{(t_2 - t_1)} - 2\frac{(t - t_3)}{(t_3 - t_1)}\right] = m\frac{\rho_v}{\rho},$$

odtud

$$c = c_v\frac{\rho_v}{\rho}\frac{1}{\left[\dfrac{(t - t_2)}{(t_2 - t_1)} - 2\dfrac{(t - t_3)}{(t_3 - t_1)}\right]} = 920\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}.$$

4 body

b) Úpravou rovnice (1) dostaneme

$$\frac{m_1}{m} = \frac{c}{c_v}\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)} + \frac{\rho_v}{\rho} = \frac{\rho_v}{\rho}\left[\frac{\dfrac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)}}{\dfrac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)} - 2\dfrac{(t-t_3)}{(t_3-t_1)}} + 1\right] =$$

$$= \frac{\rho_v}{\rho}\left[\frac{(t-t_2)(t_3-t_1)}{(t-t_2)(t_3-t_1) - 2(t-t_3)(t_2-t_1)} + 1\right] =$$

$$= \frac{1\,000}{2\,700}\left[\frac{66{,}8 \cdot 29{,}8}{66{,}8 \cdot 29{,}8 - 2 \cdot 50{,}2 \cdot 13{,}2} + 1\right] = 1{,}48.$$

3 body

c) Přidáme-li do plného kalorimetru tři součástky, můžeme kalorimetrickou rovnici napsat ve tvaru

$$3mc\,(t-t_4) = (m_1 - 3\frac{m}{\rho}\rho_v)c_v\,(t_4-t_1) \quad \text{a} \quad \frac{3mc}{c_v}\frac{(t-t_4)}{(t_4-t_1)} = m_1 - 3\frac{m}{\rho}\rho_v. \quad (3)$$

Z rovnic (1) a (3) pak odečtením

$$\frac{c}{c_v}\left[\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)} - 3\frac{(t-t_4)}{(t_4-t_1)}\right] = 2\frac{\rho_v}{\rho}.$$

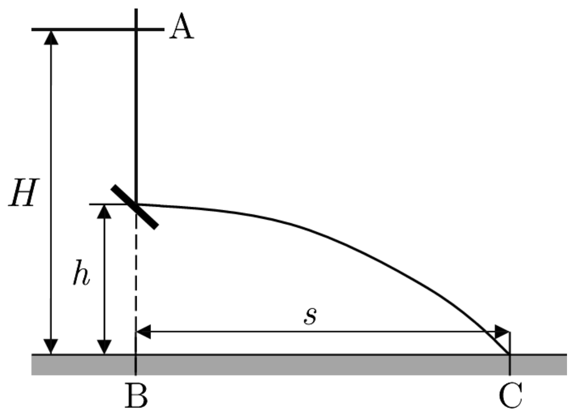
Po úpravě a číselném dosazení

$$\frac{(t-t_4)}{(t_4-t_1)} = \frac{(t-t_2)}{3\,(t_2-t_1)} - \frac{2}{3}\frac{\rho_v}{\rho}\frac{c_v}{c},$$

$$\frac{99 - \{t_4\}}{\{t_4\} - 19} = 0{,}560 \quad \Rightarrow \quad t_4 = 70\ °\text{C}.$$

3 body

7.a) Protože odrazná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel 45°, jde po odrazu kuličky o vodorovný vrh s počáteční rychlostí, kterou označíme v_1. Protože jde o dokonale pružný ráz, je velikost rychlosti dopadu kuličky stejná, jako velikost rychlosti jejího odrazu. Platí tedy vztahy $s = v_1 t_2$ a $h = \frac{1}{2}g t_2^2$, kde t_2 je doba pohybu kuličky po jejím odrazu.



Obr. R3

Vyjádříme $t_2 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ a $v_1 = s\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$. Známe-li rychlost dopadu na desku, můžeme určit dobu pádu kuličky z bodu A na desku:

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{s}{\sqrt{2hg}}.$$

Celková doba letu kuličky tedy bude

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{\sqrt{2hg}} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1{,}36\ \text{s}.$$

4 body

b) Kulička byla puštěna z výšky

$$H = h + \frac{1}{2} g t_1^2 = h + \frac{s^2}{4h} = 4{,}88\ \text{m}.$$

2 body

c) Hledanou výšku desky nad Zemí označme h_0. Během volného pádu kulička získá rychlost

$$v_2 = \sqrt{2g\,(H - h_0)}.$$

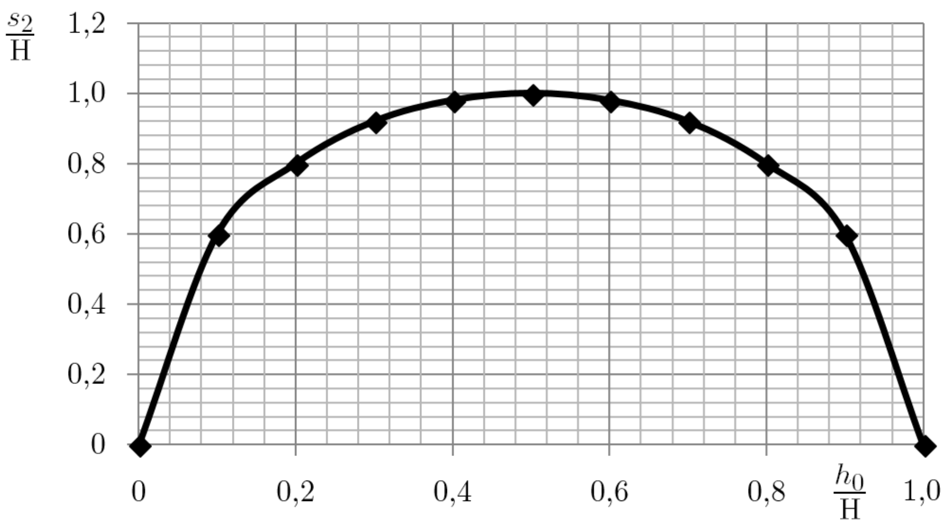
Dopadne pak do vzdálenosti

$$s_2 = v_2 \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 2\sqrt{h_0\,(H - h_0)}.$$

Tato vzdálenost bude maximální, bude-li výraz pod odmocninou maximální. To nastane právě když $h_0 = \dfrac{H}{2} = 2{,}44$ m a kulička dopadne do vzdálenosti $s_0 = H = 4{,}88$ m.

Naši úvahu potvrdíme, když si nakreslíme graf závislosti vzdálenosti s_2 na výšce h_0 v jednotkách H:

$\frac{h_0}{\mathrm{H}}$	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1
$\frac{s_2}{\mathrm{H}}$	0	0,60	0,80	0,92	0,98	1	0,98	0,92	0,80	0,60	0



Obr. R4

4 body