Řešení úloh 1. kola 60. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1.a) Doba jízdy na prvním úseku ($v_1 = 15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$):

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} = 30\ \mathrm{s}.$$

Konečná rychlost jízdy druhého úseku je

$$v = v_1 + a_2 t_2 = 23\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb na čtvrtém úseku získáme z rovnic

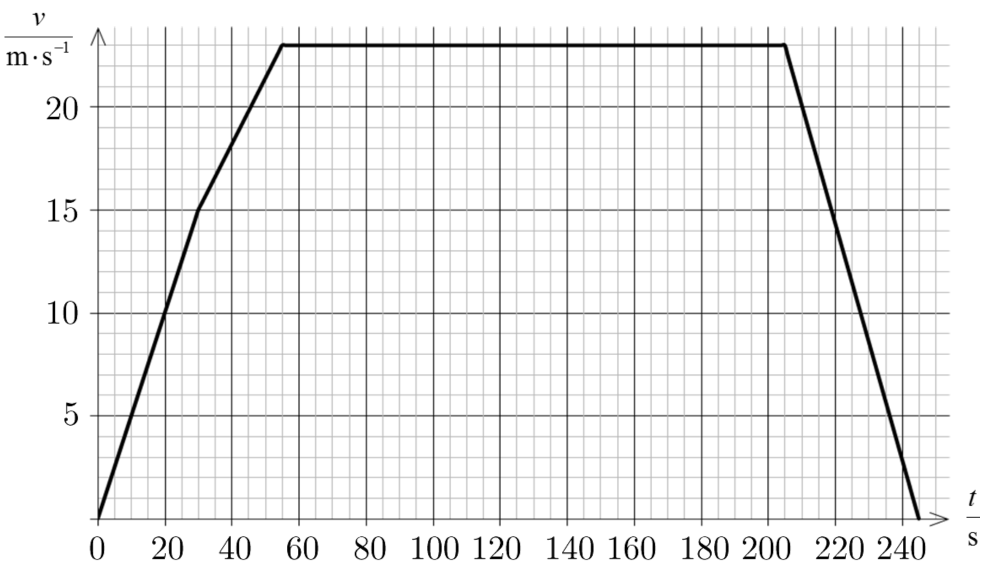
$$v = a_4 t_4,\ s = \frac{1}{2} a_4 {t_4}^2$$

vyloučením zrychlení dobu brzdění

$$t_4 = \frac{2 s_4}{v} = 40\ \mathrm{s}.$$

3 body

Graf:



Obr. R1

3 body

b) Jednotlivé dráhy určíme jako obsah plochy pod grafem:

$$s = \left[\frac{15\cdot 30}{2} + \left(15\cdot 25 + \frac{8\cdot 25}{2}\right) + 23\cdot 150 + \frac{23\cdot 40}{2}\right]\ \mathrm{m} = 4\,610\ \mathrm{m}.$$

Lze též využít pro jednotlivé pohyby příslušné vztahy a dosadit hodnoty ze zadání a hodnoty již vypočtené:

$$s = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \left(v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2\right) + v t_3 + s_4 = 4\,610\ \mathrm{m}.$$

Celkový čas je

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 245\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{min}\ 5\ \mathrm{s},$$

průměrná rychlost

$$v_p = \frac{s}{t} = 18{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 68\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

4 body

2.a) Pro hmotnost hliníkového válce platí

$$m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \cdot \pi \frac{d_1^2}{4} h_2 .$$

Ze vztahu vyjádříme výšku:

$$h_2 = \frac{4m_2}{\pi d_1^2 \rho_2} = 5{,}4\ \text{cm}.$$

Výška složeného válce pak je

$$h = h_1 + h_2 = h_1 + \frac{4m_2}{\pi d_1^2 \rho_2} = 8{,}9\ \text{cm}.$$ **4 body**

Hustota složeného válce je

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 V_1 + m_2}{V_1 + \dfrac{m_2}{\rho_2}} = \frac{\dfrac{\pi}{4} d_1^2 h_1 \rho_1 + m_2}{\dfrac{\pi}{4} d_1^2 h_1 + \dfrac{m_2}{\rho_2}} =$$

$$= \frac{\pi d_1^2 h_1 \rho_1 + 4m_2}{\pi d_1^2 h_1 \rho_2 + 4m_2} \rho_2 = 4\,700\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

3 body

b) Tlak je

$$p = \frac{(m_1 + m_2)\, g}{S} = \frac{\dfrac{\pi}{4} d_1^2 h_1 \rho_1 + m_2}{\dfrac{\pi}{4} d_1^2} g = \frac{\pi d_1^2 h_1 \rho_1 + 4m_2}{\pi d_1^2} g =$$

$$= \left(h_1 \rho_1 + \frac{4m_2}{\pi d_1^2} \right) g = 4\,100\ \text{Pa}.$$

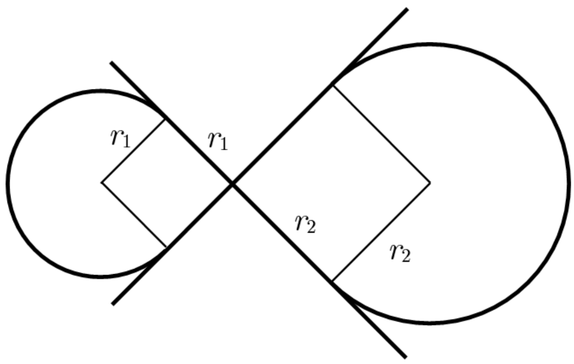
3 body

3.a) Celá smyčka se skládá ze dvou geometricky podobných okruhů (obr. R2). Každý okruh tvoří kruhový oblouk se středovým úhlem 270° a dva rovinné úseky délky poloměru příslušné kružnice. Platí

$$s = \frac{3}{4} \cdot 2\pi r_1 + 2r_1 + \frac{3}{4} \cdot 2\pi r_2 + 2r_2 = \left(\frac{3\pi}{2} + 2 \right) (r_1 + r_2) .$$

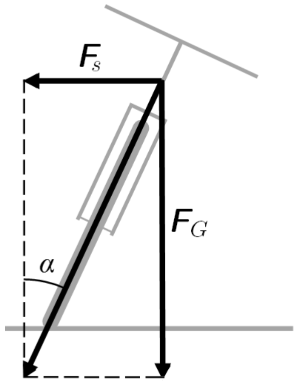
Ze vztahu plyne

$$r_1 = \frac{2s}{(3\pi + 4)} - r_2 = 17\ \text{m}.$$ **3 body**



Obr. R2

b) Cyklista se po celou dobu pohybuje rychlostí stálé velikosti $v = \frac{s}{t}$.
Při průjezdu zatáčkou působí na cyklistu s kolem o celkové hmotnosti m v jeho neinerciální vztažné soustavě tíhová síla o velikosti $F_G = mg$ a setrvačná odstředivá síla o velikosti $F_s = \frac{mv^2}{r}$ (obr. R3). Z rovnoběžníku sil plyne



Obr. R3

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_s}{F_G} = \frac{v^2}{gr} = \frac{s^2}{grt^2}.$$

Příslušné úhly jsou $\alpha_1 = 13°$, $\alpha_2 = 8{,}6°$. **3 body**

c) Kolmá tlaková síla na vozovku je tíhová síla, třecí síla má velikost $F_t = fmg$. Pro bezpečný průjezd musí platit $F_t > F_s$, neboli

$$\frac{F_s}{F_t} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{fmg} = \frac{v^2}{fgr} < 1.$$

Pro menší kružnici dostaneme

$$\frac{F_{s1}}{F_t} = \frac{v^2}{fgr_1} = 0,65 < 1,$$

nerovnost je splněna, čímž je splněna i pro větší kružnici. **4 body**

4.a) Z rovnic $s = \frac{1}{2}at_0^2$, $a = g\sin\alpha$ plyne

$$t_0 = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}} = 8{,}0 \text{ s}.$$

1 bod

b) Tentokrát je zrychlení lyžaře

$$a_1 = g\left(\sin\alpha - f_1\cos\alpha\right) \tag{1}$$

na stejné dráze $s = \frac{1}{2}a_1t_1^2$. Z rovnic plyne

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g\left(\sin\alpha - f_1\cos\alpha\right)}} = 9{,}3 \text{ s}.$$

2 body

c) Z obdobných rovnic $a_2 = g\left(\sin\alpha - f_2\cos\alpha\right)$, $s = \frac{1}{2}a_2t_2^2$ dostaneme

$$f_2 = \mathrm{tg}\alpha - \frac{2s}{gt_2^2\cos\alpha} = 0{,}18. \tag{2}$$

2 body

d) Z rovnic popisujících rozjezd lyžaře $s = \frac{1}{2}a_1t_1^2$, $v_1 = a_1t_1$ vyjádříme vyloučením času velikost konečné rychlosti

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s}. \tag{3}$$

Z této rychlosti na vodorovné rovině lyžař zpomaluje, jeho rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení popisují rovnice $s_1 = \frac{1}{2}a'_1 t'^2_1$, $v_1 = a'_1 t'_1$. Z nich vyloučením času dostaneme

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a'_1}. \tag{4}$$

Na vodorovné rovině se lyžař pohybuje se zrychlením

$$a'_1 = \frac{f_1 mg}{m} = f_1 g. \tag{5}$$

Ze vztahů (3) a (4) plyne

$$s_1 = \frac{2a_1 s}{2a'_1} = \frac{a_1}{a'_1} s.$$

Dalším dosazením vztahů (1) a (5) dostaneme

$$s_1 = \frac{g\left(\sin\alpha - f_1\cos\alpha\right)}{f_1 g} s = \left(\frac{\sin\alpha}{f_1} - \cos\alpha\right) s = 190\ \mathrm{m}.$$

3 body

V případě c) je situace stejná, hledaná dráha je

$$s_2 = \left(\frac{\sin\alpha}{f_2} - \cos\alpha\right) s,$$

kde f_2 je dáno vztahem (1). Po číselném dosazení dostaneme $s_2 = 19$ m.

2 body

Poznámka: Případné obecné řešení je $s_2 = \dfrac{2s^2\cos\alpha}{gt_2^2 \sin\alpha - 2s}$.

5.a) Pomocí 2. Newtonova pohybového zákona dostaneme

$$F = ma = m\frac{v_1 - v_2}{\Delta t} = 2\,700\ \mathrm{N}.$$

1 bod

b) Výkon je $P = \dfrac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2}{\Delta t} = \dfrac{m\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2\Delta t} = 40$ kW. **1 bod**

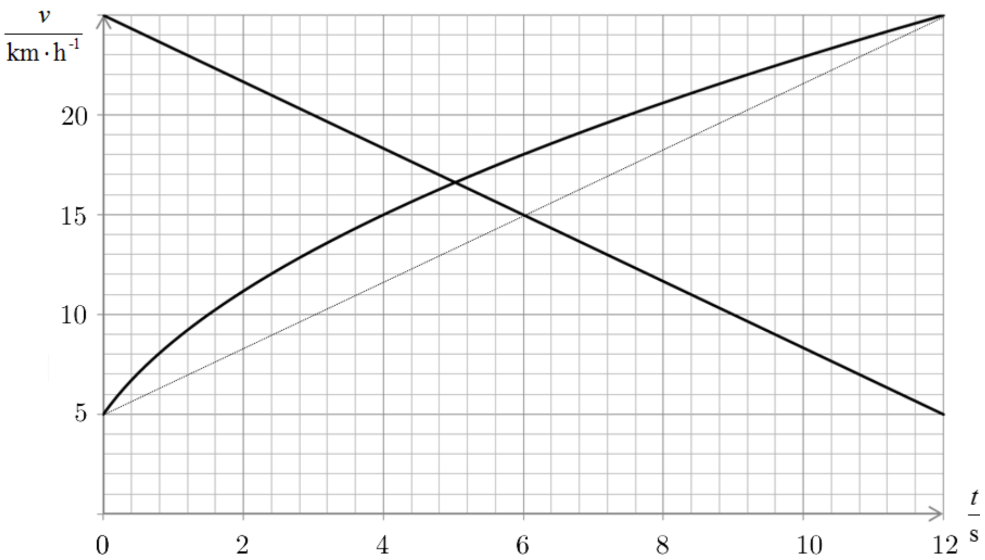
c) Nahradíme-li konečnou rychlost v_2 proměnnou rychlostí v a dobu rozjíždění Δt proměnným časem t měřeným od začátku zrychlování, dostaneme

$$P = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv^2}{t}.$$

Z rovnice plyne $v = \sqrt{v_2^2 + \dfrac{2Pt}{m}}$. Sestavíme tabulku a sestrojíme graf.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	2	4	6	8	10	12
$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	5,0	11,2	15,0	18,0	20,6	22,9	25,0

6 bodů



Obr. R4

d) Doplníme graf pro pohyb rovnoměrně zpomalený z rychlosti 25 m$\cdot$s^{-1} na rychlost 5 m $\cdot$ s^{-1}. Z porovnání obsahů ploch pod grafy plyne, že při rozjíždění ujede automobil větší dráhu. **2 body**

Poznámka: Podle obsahu plochy pod grafem rovnoměrně zpomaleného pohybu je brzdná dráha 180 m, dráha při rozjíždění je určena integrálem

$$s = \int_0^{12} \sqrt{v_2^2 + \frac{2Pt}{m}}\mathrm{d}t = \left[\frac{m}{3P}\sqrt{\left(v_2^2 + \frac{2Pt}{m}\right)^3}\right]_0^{12} = 207\mathrm{m}.$$

6.a) K měření byla použita lať délky 163 cm, šířka plošky podpěry byla 4,8 mm. Ukázka naměřených hodnot a zpracování:

Hmotnost latě byla měřením stanovena $m_0 = (260 \pm 1)$ g, relativní odchylka měření je $\delta m_0 = 0{,}4\%$.

b) Ukázka naměřených hodnot a zpracování:

$$\overline{m} = x \cdot m_0 = 0{,}516 \cdot 260 \text{ g} = 134{,}2 \text{ g} \doteq 134 \text{ g},$$

$$\delta m = \delta x + \delta m_0 = 0{,}45 \ \% + 0{,}42 \ \% = 0{,}87 \ \% \doteq 0{,}9 \ \%,$$

$$\Delta m = \frac{\overline{m} \cdot \delta m}{100\%} = \frac{134 \text{ g} \cdot 087 \ \%}{100 \ \%} = 1{,}2 \text{ g} \doteq 1 \text{ g}.$$

Hmotnost tělesa byla měřením stanovena $m = (134 \pm 1)$ g, relativní odchylka měření je $\delta m = 0{,}9$ %.

c) Na vahách byla zjištěna hmotnost latě 259,4 g a hmotnost tělesa 133,0 g. Obě hodnoty jsou v souladu s naměřenými hodnotami.

Číslo měření	$\frac{m_z}{\mathrm{g}}$	$\frac{d}{\mathrm{cm}}$	$\frac{d_0}{\mathrm{cm}}$	$\frac{m_0}{\mathrm{g}}$	$\frac{\Delta m_0}{\mathrm{g}}$
1	100	52,9	20,5	258	2
2	100	49,8	19,1	261	1
3	100	45,6	17,4	262	2
4	100	41,5	15,9	261	1
5	100	37,4	14,4	260	0
6	200	43,8	33,8	259	1
7	200	40,4	31,1	260	0
8	200	37,3	28,8	259	1
9	200	33,6	26,0	258	2
10	200	30,1	23,1	261	1
Střední hodnota				160	1,1
Relativní odchylka				$\delta m_0 = 0{,}42$ %	

Číslo měření	$\frac{d}{\mathrm{cm}}$	$\frac{d_0}{\mathrm{cm}}$	$x = \frac{d_0}{d}$	Δx
1	53,0	27,2	0,513	0,003
2	51,2	26,5	0,518	0,002
3	49,1	25,5	0,519	0,003
4	47,3	24,4	0,516	0,000
5	43,9	22,5	0,513	0,003
6	40,3	20,7	0,514	0,002
7	37,6	19,3	0,513	0,003
8	35,4	18,4	0,520	0,004
9	33,2	17,2	0,518	0,002
10	31,5	16,3	0,517	0,001
Střední hodnota			0,516	0,0023
Relativní odchylka			$\delta x = 0{,}45$ %	

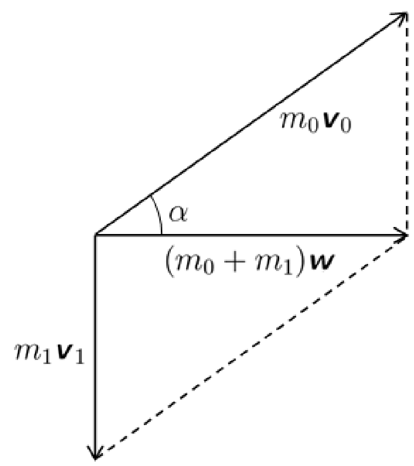
7.a) Z kinematických rovnic $v_1 = gt$, $h = \frac{1}{2}gt^2$ dostaneme vyloučením času počáteční výšku míčku nad místem srážky:

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}90 \text{ m}.$$

2 body

b) Diabolka musí letět v takovém směru, aby se soustava míčku s diabolkou v okamžiku bezprostředně po srážce pohybovala vodorovně. To znamená, že bezprostředně po srážce má soustava vodorovný směr okamžité rychlosti $\boldsymbol{w}$, a tím vodorovný směr okamžité hybnosti $(m_0 + m_1)\boldsymbol{w}$. Pak podle zákona zachování hybnosti je tato hybnost rovna vektorovému součtu hybnosti diabolky $m_0\boldsymbol{v}_0$ a hybnosti míčku $m_1\boldsymbol{v}_1$ bezprostředně před srážkou (obr. R5):

$$m_0\boldsymbol{v}_0 + m_1\boldsymbol{v}_1 = (m_0 + m_1)\boldsymbol{w}.$$



Obr. R5

Velikost hybnosti soustavy splňuje Pythagorovu větu:

$$[(m_0 + m_1)w]^2 + (m_1 v_1)^2 = (m_0 v_0)^2.$$

Z rovnice dostaneme hledanou velikost rychlosti míčku s diabolkou bezprostředně po srážce

$$w = \frac{\sqrt{(m_0 v_0)^2 - (m_1 v_1)^2}}{m_0 + m_1} = 6{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \qquad (1)$$

Úhel mezi rychlostmi $\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{v}_0$ je určen rovnicí

$$\sin\alpha = \frac{m_1 v_1}{m_0 v_0} = 0{,}549,$$

z níž dostaneme $\alpha = 33°$. **5 bodů**

c) Poměr kinetické energie po srážce a kinetické energie před srážkou je

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{\frac{1}{2}(m_0 + m_1)\, w^2}{\frac{1}{2} m_0 v_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2}.$$

Užitím rovnice (1) dostaneme

$$\frac{E'_k}{E_k} = \frac{(m_0 + m_1)\, \dfrac{(m_0 v_0)^2 - (m_1 v_1)^2}{(m_0 + m_1)^2}}{m_0 v_0^2 + m_1 v_1^2} = \frac{(m_0 v_0)^2 - (m_1 v_1)^2}{(m_0 + m_1)\left(m_0 v_0^2 + m_1 v_1^2\right)} = 0{,}030.$$

3 body