Řešení úloh krajského kola 60. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů

1.a) Práce s daným průměrným výkonem se využila na získání kinetické energie:

$$P_1 t_1 = \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Z rovnice plyne

$$P_1 = \frac{m v_1^2}{2 t_1} = 21 \text{ kW}.$$

Práce s daným průměrným výkonem se vyžila na zvýšení kinetické energie

$$P_2 t_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Z rovnice plyne

$$P_2 = \frac{m \left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2 t_2} = 31 \text{ kW}.$$

Práce s hledaným průměrným výkonem během celé doby rozjíždění se využila na získání kinetické energie

$$P \left(t_1 + t_2\right) = \frac{1}{2} m v_2^2.$$

Z rovnice plyne

$$P = \frac{m v_2^2}{2 \left(t_1 + t_2\right)} = 27 \text{ kW}.$$

6 bodů

b) Z obdobné výchozí rovnice

$$P_0 t = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

plyne

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2 P_0 t}{m}} = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 95 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Okamžitý výkon je roven součinu velikostí okamžité urychlovací síly a okamžité rychlosti:

$$P_0 = F v_0 = m a v_0.$$

Z rovnice plyne

$$a = \frac{P_0}{m v_0} = 2{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

4 body

2.a) Na prvním úseku se saně rozjíždějí rovnoměrně zrychleným pohybem působením výslednice složky tíhové síly ve směru pohybu a třecí síly proti směru pohybu. Velikost zrychlení na prvním úseku je

$$a_1 = \frac{mg\sin\alpha - f_1 mg\cos\alpha}{m} = g\left(\sin\alpha - f_1\cos\alpha\right) = 1{,}416\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 1{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

Na druhém úseku při rovnoměrném pohybu jsou složka tíhové síly ve směru nakloněné roviny a třecí síla v rovnováze. Z rovnosti velikostí těchto sil

$$mg\sin\alpha = f_2 mg\cos\alpha$$

dostaneme součinitel smykového tření na druhém úseku

$$f_2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Třetí úsek je rovnoměrně zpomalený způsobený třecí silou se stejným součinitelem f_2 na neupraveném sněhu. Velikost zrychlení na vodorovném úseku pak je

$$a_3 = \frac{f_2 mg}{m} = f_2 g = g\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}085\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 2{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

b) K sestrojení grafu potřebujeme vypočítat velikost rychlosti dosažené na prvním úseku a doby jízdy na druhém a třetím úseku. Velikost rychlosti je:

$$v = a_1 t_1 = 11{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 11{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Dráha prvního úseku

$$s = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}v t_1$$

je stejná jako dráha druhého úseku

$$s = v t_2.$$

Z rovnosti plyne

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = 4{,}0\ \mathrm{s}.$$

Na třetím úseku platí

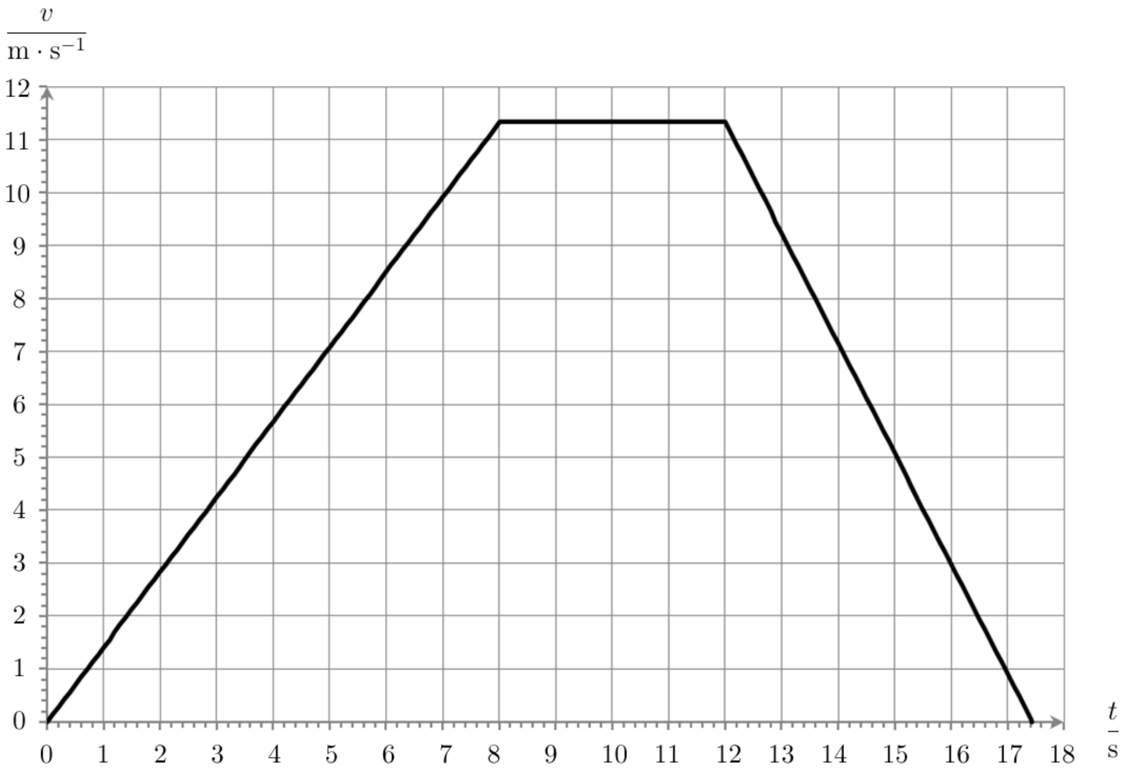
$$t_3 = \frac{v}{a_3} = 5{,}434\ \mathrm{s} \doteq 5{,}4\ \mathrm{s}.$$

Graf je na obrázku R1.

c) Celkovou dráhu určíme jako obsah plochy pod grafem (viz obr. R1)

$$s = \left(\frac{1}{2}\cdot 11{,}3\cdot 8 + 11{,}3\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 11{,}3\cdot 5{,}4\right)\mathrm{s} = 120{,}9\ \mathrm{m} \doteq 120\ \mathrm{m}.$$

2 body



Obr. R1

4 body

Poznámka: Požadované velikosti zrychlení a_1 a a_3 v části a) jsou zaokrouhleny na 2 platné číslice, další pomocné výsledky (velikost rychlosti v a čas t_3) nutné k sestrojení grafu jsou počítány z přesněji uváděných hodnot obou zrychlení. Podle míry zaokrouhlování se v grafu hodnoty konečné rychlosti a doby pohybu při zastavování mohou mírně lišit, což při hodnocení tolerujeme. Celková dráha však po zaokrouhlení na 2 platné číslice vyjde vždy 120 m.

3. a) Vor s chlapcem tvoří izolovanou soustavu dvou těles, v níž si vzájemným silovým působením udělí vzhledem k vodě hybnosti stejné velikosti a opačného směru. Označme v_1 velikost rychlosti chlapce vzhledem k vodě. Ze zákona zachování hybnosti

$$mv_1 = Mv_0,$$

kde $v_1 = u - v_0$, postupně plyne

$$v_1 = \frac{M}{m}v_0, \quad u = \frac{M+m}{m}v_0 = 3{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

b) Práce vykonaná chlapcem je součet kinetických energií chlapce a voru

$$W = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2 =$$

$$= \frac{(M+m)\,Mv_0^2}{2m} = 220\ \mathrm{J}.$$

3 body

c) Poměr kinetických energií je

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}Mv_0^2} = \frac{m\left(\frac{M}{m}v_0\right)^2}{Mv_0^2} = \frac{M}{m} = 4.$$ **2 body**

d) Například: Během rozbíhání vlivem vodorovné síly, kterou chlapec na vor působí, bude též vor zrychlovat. Během zastavování chlapce působí chlapec na vor silou v opačném směru, čímž bude vor zpomalovat. V okamžiku zastavení chlapce bude též vor vzhledem k vodě opět v klidu.
Nebo: Na soustavu voru a chlapce nepůsobí ve vodorovném směru žádná vnější síla, proto hybnost soustavy je v každém okamžiku nulová jako na počátku. Tělesa na sebe působí pouze vzájemně, čímž se mění okamžitá rychlost každého z nich. V okamžiku zastavení chlapce se zastaví i vor (těžiště soustavy po celou dobu zůstává v klidu). **2 body**

4.a) Z vektorového diagramu hybností plyne

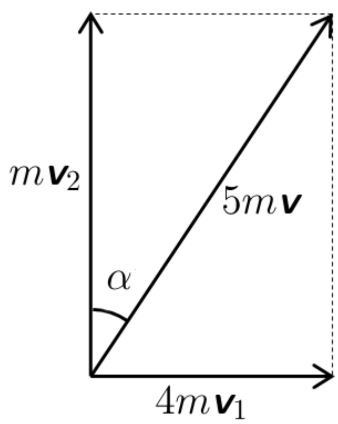
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4mv_1}{mv_2} = \frac{4v_1}{v_2},$$

tedy

$$v_2 = \frac{4v_1}{\operatorname{tg}\alpha} = 11v_1.$$

Dále z vektorového diagramu plyne

$$\sin\alpha = \frac{4mv_1}{(m+4m)\,v} = \frac{4v_1}{5v}.$$



Obr. R2

Z rovnice dostaneme $$v = \frac{4v_1}{5\sin\alpha} = 2{,}3v_1.$$ **5 bodů**

b) Při srážce jsou splněny zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie:

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2,$$
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2.$$

Rovnice upravíme:

$$m_2u_2 = m_1\left(v_1 - u_1\right),$$
$$m_2u_2^2 = m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right).$$

Druhou rovnici vydělíme rovnicí první. Poté krátíme výrazem $v_1 - u_1$ (výraz je nenulový, neboť nárazem se rychlost prvního puku změnila):

$$u_2 = \frac{v_1^2 - u_1^2}{v_1 - u_1} = v_1 + u_1 = 9{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Z první upravené rovnice pak dosazením dostaneme

$$m_2 = \frac{v_1 - u_1}{v_1 + u_1}m_1 = 89\ \mathrm{g}.$$ **5 bodů**