Řešení úloh krajského kola 60. ročníku Fyzikální olympiády

ve školním roce 2018/2019

Kategorie E

Autoři úloh: J. Thomas (2–4) a A. Воронов (1)

FO60E3–1: Na meteorologické stanici

a) Objem sněhu v nádobě je

$$V_0 = Sh = 200\,\mathrm{cm}^2 \cdot 15\,\mathrm{cm} = 3\,000\,\mathrm{cm}^3.$$

Pro hustotu sněhu ve srážkoměru tak vychází

$$\varrho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{450\,\mathrm{g}}{3\,000\,\mathrm{cm}^3} = 0{,}150\,\mathrm{g/cm}^3 = 150\,\mathrm{kg/m}^3.$$ **3 body**

b) Nejprve určíme celkový objem V, ze kterého sníh napadl do srážkoměru při rychlosti $v = 0{,}6\,\mathrm{m/s} = 60\,\mathrm{cm/s}$ za čas $6\,\mathrm{h} = 6 \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 21\,600\,\mathrm{s}$; dostáváme

$$V = SH = Svt = 200\,\mathrm{cm}^2 \cdot 60\,\mathrm{cm/s} \cdot 21\,600\,\mathrm{s} = 259\,200\,000\,\mathrm{cm}^3 = 259{,}2\,\mathrm{m}^3.$$

4 body

Pro hustotu padajího sněhu pak platí

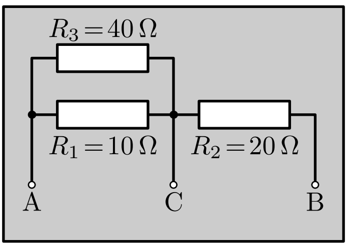
$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{450\,\mathrm{g}}{259{,}2\,\mathrm{m}^3} \doteq 1{,}736\,1\,\mathrm{g/m}^3 \doteq 1{,}7\,\mathrm{g/m}^3.$$ **3 body**

FO60E3–2: Černá skříňka

a) Zdířky B a C jsou zřejmě připojeny k rezistoru R_2 s odporem $20\,\Omega$. Abychom mezi body A a B naměřili $R_{\mathrm{AB}} = 28\,\Omega$, musíme rezistory $R_1 = 10\,\Omega$ a $R_3 = 40\,\Omega$ zapojit paralelně. Pak bude jejich výsledný odpor

$$R_{\mathrm{AC}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{10\,\Omega \cdot 40\,\Omega}{10\,\Omega + 40\,\Omega} = 8\,\Omega.$$

Schéma zapojení mezi zdířkami je na obr. 1. **4 body**



Obr. 1: Zapojení rezistorů v černé skříňce v úloze 2

Poznámka: Rezistory R_1 a R_3 lze pochopitelně zaměnit, uznáno by mělo být i jakékoli ekvivalentní zapojení s upraveným propojením nebo větvením vodičů.

b) Po připojení zdroje bude obvodem procházet celkový proud

$$I = I_{\mathrm{AB}} = \frac{U}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{28\,\Omega} = \frac{3}{7}\,\mathrm{A} \doteq 0{,}428\,57\,\mathrm{A} \doteq 430\,\mathrm{mA}.$$

Na rezistoru $R_2 = 20\,\Omega$ bude napětí

$$U_{\mathrm{BC}} = R_2 I = 20\,\Omega \cdot 0{,}428\,57\,\mathrm{A} = 8{,}571\,4\,\mathrm{V} \doteq 8{,}6\,\mathrm{V},$$

na zbylých rezistorech mezi body A a C bude napětí

$$U_{AC} = U - U_{BC} = 12\,\mathrm{V} - 8{,}571\,4\,\mathrm{V} = 3{,}428\,6\,\mathrm{V} \doteq 3{,}4\,\mathrm{V}.$$

Rezistorem $R_1 = 10\,\Omega$ bude procházet proud

$$I_{10} = \frac{U_{AC}}{R_1} = \frac{3{,}428\,6\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} = 0{,}342\,86\,\mathrm{A} \doteq 340\,\mathrm{mA}$$

a rezistorem $R_3 = 40\,\Omega$ bude procházet proud

$$I_{40} = \frac{U_{AC}}{R_3} = \frac{3{,}428\,6\,\mathrm{V}}{40\,\Omega} \doteq 0{,}085\,715\,\mathrm{A} \doteq 86\,\mathrm{mA}.$$

4 body

c) Celkový výkon po připojení zdroje vychází

$$P = \frac{U^2}{R_{AB}} = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{28\,\Omega} \doteq 5{,}142\,9\,\mathrm{W} \doteq 5{,}1\,\mathrm{W}.$$

2 body

Poznámka: Výkon lze vypočítat také jako součin napětí a proudu

$$P = UI_{AB} = 12\,\mathrm{V} \cdot 0{,}428\,57\,\mathrm{A} = 5{,}142\,9\,\mathrm{W} \doteq 5{,}1\,\mathrm{W}$$

nebo pomocí odporu a proudu

$$P = R_{AB}I_{AB}^2 = 28\,\Omega \cdot (0{,}428\,57\,\mathrm{A})^2 \doteq 5{,}142\,9\,\mathrm{W} \doteq 5{,}1\,\mathrm{W}.$$

FO60E3–3: Fotbalové utkání

a) Protože hmotnost 1 litru vody (a v našem případě i nápoje) při hustotě $\varrho_v = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ je 1 kg, byla celková hmotnost nápojů odpovídat 40 čtvrtlitrům hroznové limonády po 0,25 kg a 25 „třetinkám“ pomerančové limonády po 0,33 kg, dohromady

$$m = (40 \cdot 0{,}25\,\mathrm{kg} + 25 \cdot 0{,}33\,\mathrm{kg}) = 18{,}25\,\mathrm{kg},$$

celková hmotnost skla

$$m_s = 40m_{s1} = 40 \cdot 0{,}25\,\mathrm{kg} = 10\,\mathrm{kg},$$

celková hmotnost hliníkových plechovek

$$m_p = 25m_{p1} = 25 \cdot 0{,}013\,\mathrm{kg} = 0{,}325\,\mathrm{kg}.$$

K ochlazení nápojů z teploty $t_1 = 25\,°\mathrm{C}$ na teplotu $t_v = 7\,°\mathrm{C}$ je potřeba odebrat teplo

$$Q = (mc_v + m_s c_s + m_p c_{Al})\,(t_1 - t_v) =$$
$$= (18{,}25 \cdot 4\,200 + 10 \cdot 2\,600 + 0{,}325 \cdot 900) \cdot (25 - 7)\ \mathrm{J} = 1\,852\,965\,\mathrm{J}.$$

Toto teplo lednička při výkonu $P = 210\,\mathrm{W}$ odebere za čas

$$\tau = \frac{Q}{P} = \frac{1\,852\,965\,\mathrm{J}}{210\,\mathrm{W}} \doteq 8\,823{,}6\,\mathrm{s} \doteq 8\,800\,\mathrm{s} \doteq 150\,\mathrm{min}.$$

5 bodů

b) Označme hmotnost potřebného ledu m_l. Led se musí nejprve ohřát na teplotu tání $t_0 = 0\,°\mathrm{C}$, pak roztát a nakonec se voda z něj vzniklá musí ohřát na výslednou teplotu t_v. Teplo k tomu potřebné dodává nápoj ve sklenici, který chce Marek ochladit, o objemu 0,25 litru a tím o hmotnosti $m_v = 0{,}25\,\mathrm{kg}$. Platí

$$m_l\,[c_l\,(t_0 - t_l) + l_t + c_v\,(t_v - t_0)] = m_v c_v\,(t_1 - t_v)\,.$$

Odtud vychází

$$m_\mathrm{l} = \frac{m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} (t_1 - t_\mathrm{v})}{c_\mathrm{l} (t_0 - t_\mathrm{l}) + l_\mathrm{t} + c_\mathrm{v} (t_\mathrm{v} - t_0)} =$$

$$= \frac{0{,}25\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot (25\,\mathrm{°C} - 7\,\mathrm{°C})}{2\,100\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot [0\,\mathrm{°C} - (-18\,\mathrm{°C})] + 334\,\mathrm{kJ/kg} + 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot (7\,\mathrm{°C} - 0\,\mathrm{°C})} \doteq$$

$$\doteq 0{,}047\,109\,\mathrm{kg} \doteq 47\,\mathrm{g}.$$

Jedna kostka ledu má hmotnost

$$m_2 = \varrho_2 V = \varrho_2 a^3 = 920\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (0{,}015\,\mathrm{m})^3 = 0{,}003\,105\,\mathrm{kg} = 3{,}105\,\mathrm{g} \doteq 3{,}1\,\mathrm{g},$$

bylo by tedy zapotřebí

$$n = \frac{m_\mathrm{l}}{m_2} = \frac{47{,}109\,\mathrm{g}}{3{,}105\,\mathrm{g}} \doteq 15{,}172 \doteq 16$$

kostiček ledu (v tomto případě je rozumnější zaokrouhlit výsledek nahoru).

5 bodů

FO60E3–4: Závody chodců

a) K předejití chodců dochází vždy, když $\Delta s = 0\,\mathrm{m}$. Protože byl Martin v cíli dříve, odpovídá záporná hodnota Δs situaci, když je Martin před Zdeňkem (jako v cíli), kladná hodnota, když je Zdeněk před Martinem. Martin tak předešel Zdeňka celkem 3× v časech 18 min, 43 min a 51 min. Zdeněk Martina předešel 2×, v časech 25 min a 48 min. **4 body**

b) Z posledních hodnot v grafu vidíme, že když je Martin už v cíli, Zdeňkovi zbývá ještě $\Delta s = 10\,\mathrm{m} = 0{,}01\,\mathrm{km}$. Rozdíl průměrných rychlostí během času $t = 60\,\mathrm{min} = 1\,\mathrm{h} = 3\,600\,\mathrm{s}$ tak vychází

$$v_\mathrm{pM} - v_\mathrm{pZ} = \frac{\Delta s}{t} = \frac{0{,}01\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 0{,}01\,\mathrm{km/h} = \frac{10\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}002\,777\,8\,\mathrm{m/s} \doteq 0{,}002\,8\,\mathrm{m/s}.$$

3 body

c) V prvním úseku trvajícím $t_1 = 15\,\mathrm{min} = 0{,}25\,\mathrm{h} = 900\,\mathrm{s}$ se pohyboval rychleji Zdeněk a urazil o $\Delta s_1 = 15\,\mathrm{m}$ větší vzdálenost. Rozdíl průměrných rychlostí v prvních 15 minutách je proto

$$\Delta v = v_{1\mathrm{Z}} - v_{1\mathrm{M}} = \frac{\Delta s_1}{t_1} = \frac{15\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{min}} = 1\,\mathrm{m/min}.$$

Pokud byla rychlost Zdeňka $v_{1\mathrm{Z}} = 5{,}4\,\mathrm{km/h} = 5\,400/60\,\mathrm{m/min} = 90\,\mathrm{m/min}$, dostáváme pro rychlost Martina

$$v_{1\mathrm{M}} = v_{1\mathrm{Z}} - \Delta v = 90\,\mathrm{m/min} - 1\,\mathrm{m/min} = 89\,\mathrm{m/min}.$$

3 body

Poznámka: Vztah pro rozdíl průměrných rychlostí v části b) lze také odvodit ze skutečnosti, že Martin za dobu t ušel průměrnou rychlostí v_pM vzdálenost s (tu ze zadání nevyčteme), Zdeněk průměrnou rychlostí v_pZ pouze $s - \Delta s$. Pro rozdíl rychlostí pak dostáváme

$$v_\mathrm{pM} - v_\mathrm{pZ} = \frac{s}{t} - \frac{s - \Delta s}{t} = \frac{\Delta s}{t} = \frac{10\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{min}} \doteq 0{,}166\,67\,\mathrm{m/min} \doteq 0{,}17\,\mathrm{m/min}.$$

Úlohy připravila komise pro výběr úloh při ÚKFO České republiky ve složení Dagmar Kaštilová, Věra Koudelková, Michaela Křížová, Lenka Podzimková, Richard Polma, Jindřich Pulíček a Lukáš Richterek ve spolupráci s autorem úloh Janem Thomasem. Úloha 1 byla převzata z Олимпиадаы Максвелла, Всероссийской олимпиады школьников по физике 2014.