Řešení úloh školního kola 60. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E a F

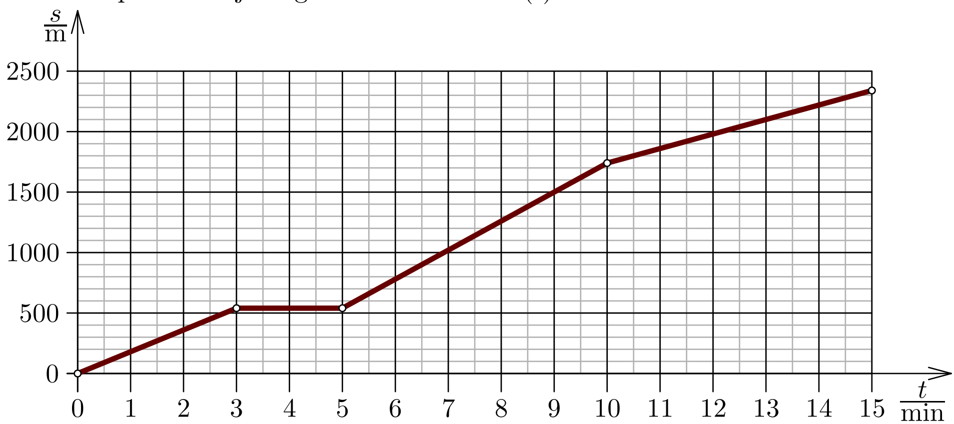
Autoři úloh: J. Jírů (10, 12), V. Koudelková (11), L. Richterek (3, 7)
a J. Thomas (1–2, 4–6, 8–9)

FO60EF1–1: Grafy pohybu

a) Pro závislost dráhy na čase můžeme napsat tabulku hodnot:

t/min	0	3	5	10	15
s/m	0	540	540	1740	2340

Z nich pak sestrojíme graf závislosti $s = s(t)$:

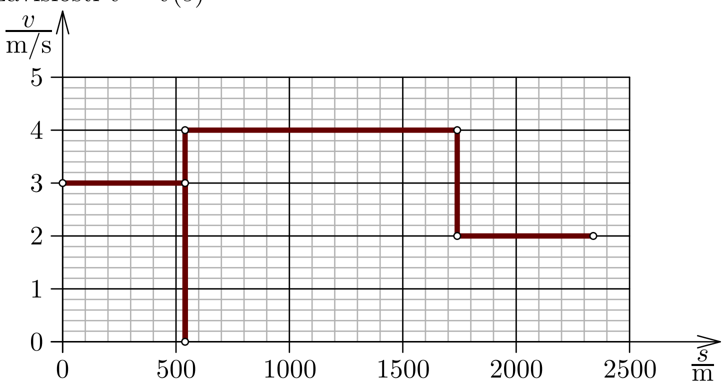


4 body

Podobně pro závislost rychlosti na uražené dráze dostáváme tabulku

s/m	0	540	540	540	1740	1740	2340
v/(m/s)	3	3	0	4	4	2	2

a graf závislosti $v = v(s)$



4 body

b) Z grafu závislosti dráhy na čase $s = s(t)$ odečteme, že za prvních 9 minut koloběžkář urazil vzdálenost 1 500 m. **2 body**

Poznámka: U grafů je důležité odlišovat „čeho na čem" – nezávislá proměnná („na čem") by měla být vynášena na vodorovné, závislá („čeho") na svislé; záměna os by neměla být hodnocena plným počtem bodů.

FO60EF1–2: Vlak na mostě

a) Pokud celý vlak přejede přes most, bude čelo lokomotivy o délku vlaku dále, než je právě konec mostu. Na ujetí vzdálenosti od konce mostu do místa o délku vlaku dále potřebovala lokomotiva právě čas t_2, za který vlak projede okolo semaforu, po mostě čelo vlaku přejelo za čas $t_1 - t_2$. Pro rychlost vlaku tak vychází

$$v = \frac{l}{t_1 - t_2} = \frac{240\,\mathrm{m}}{21\,\mathrm{s} - 9\,\mathrm{s}} = 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

b) Strojvůdce projede po mostě za čas $t_3 = t_1 - t_2 = 21\,\mathrm{s} - 9\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{s}$. K výsledku lze dospět i podělením délky mostu l rychlostí v vypočtenou v předchozí části

$$t_3 = \frac{l}{v} = \frac{240\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m/s}} = 12\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

c) Pro délku vlaku platí

$$L = vt_2 = 20\,\mathrm{m/s} \cdot 9\,\mathrm{s} = 180\,\mathrm{m}.$$ **2 body**

d) Těsně po předjetí bude čelo předjíždějícího vlaku o vzdálenost L před čelem vlaku předjížděného, vzájemná rychlost vlaků bude $v - v/2 = v/2 = 10\,\mathrm{m/s}$. Touto rychlostí musí lokomotiva předjíždějícího vlaku ujet vzdálenost $2L$, pro čas předjíždění tak získáme

$$t_4 = \frac{2L}{\frac{v}{2}} = \frac{4L}{v} = \frac{4 \cdot 180\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m/s}} = 36\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

e) Podobně jako v předchozí části čelo lokomotivy při míjení ujede vzdálenost $2L$, vzájemná rychlost vlaků bude ale nyní $v + v/2 = 3v/2 = 30\,\mathrm{m/s}$. Pro čas míjení tak vychází

$$t_5 = \frac{2L}{\frac{3v}{2}} = \frac{4L}{3v} = \frac{4 \cdot 180\,\mathrm{m}}{3 \cdot 20\,\mathrm{m/s}} = 12\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

FO60EF1–3: Vodní elektrárna Orlík

a) Mechanická polohová energie vody mgh se přeměňuje na elektrickou energii s účinností η, za čas $t = 1\,\mathrm{s}$ se přemění energie vody o hmotnosti dané součinem hustoty a objemového průtoku $m = \varrho V/t = \varrho Q$. Pro výkon jedné turbíny tedy platí

$$P_1 = \eta\frac{mhg}{t} = \eta\frac{\varrho Vhg}{t} = \eta\varrho Qgh =$$
$$= 0{,}87 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 150\,\mathrm{m^3/s} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \cdot 70{,}5\,\mathrm{m} = 90\,162\,450\,\mathrm{W} \doteq 90\,\mathrm{MW}.$$

Celkový výkon 4 turbín pak bude $P = 4P_1 = 4 \cdot 90\,\mathrm{MW} = 360\,\mathrm{MW}$. Na internetu (např. na stránce `https://www.svetenergie.cz/cz/elektrarny/`

`vodni-elektrarny/vodni-elektrarny-cez/vodni-elektrarna-orlik`) můžeme ověřit, že celkový instalovaný výkon elektrárny je 364 MW. **5 bodů**

b) Tento výkon by stačil zásobit energií počet n dobíjených elektromobilů s příkonem $P_0 = 11\,\mathrm{kW}$

$$n = \frac{P}{P_0} = \frac{360\,000\,000\,\mathrm{W}}{11\,000\,\mathrm{W}} \doteq 32\,727 \doteq 32\,000. \qquad \textbf{2 body}$$

V tomto případě má smysl zaokrouhlit výsledek spíše dolů.

c) Za dobu $t = 1\,\mathrm{den} = 24\,\mathrm{h}$ plného výkonu dodá elektrárna energii

$$E_1 = Pt = 360\,000\,000\,\mathrm{W} \cdot 24\,\mathrm{h} = 8{,}64\,\mathrm{GWh}.$$

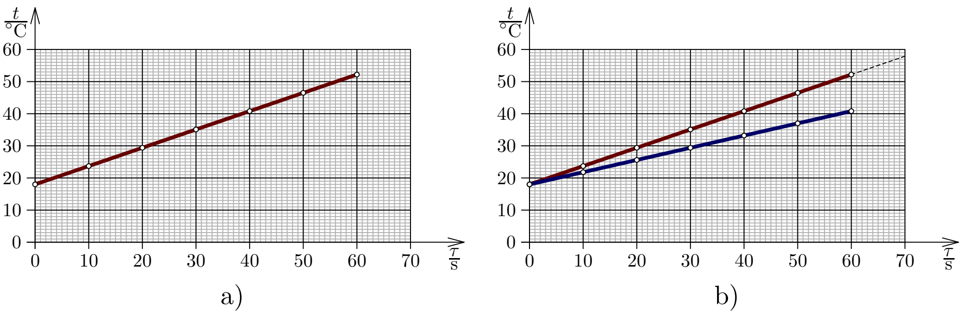
Průměrná roční produkce energie $E = 398\,\mathrm{GWh}$ pak odpovídá počtu dní na plný výkon

$$d = \frac{E}{E_1} = \frac{398\,\mathrm{GWh}}{8{,}64\,\mathrm{GWh}} \doteq 46{,}065 \doteq 46. \qquad \textbf{3 body}$$

Počet dní odpovídá skutečnosti, že elektrárna není určena k stálému dlouhodobému dodávání elektrické energie do sítě, ale k pokrývání spotřeby ve špičkách odběru.

FO60EF1–4: Zahřívání bezbarvé kapaliny

a) Graf je na obrázku 1a. Z grafu odečteme, že teplotu 30 °C bude mít kapalina po 21 sekundách. **3 body**



Obr. 1: K úloze 4

b) Prodloužením přímky grafu odhadneme (obr. 1b), že po 70 sekundách bude mít kapalina teplotu 58 °C. Výsledek můžeme ověřit i výpočtem – z tabulky vidíme, že každých 10 s vzroste teplota kapaliny o 5,7 °C, po 70 s tak bude mít teplotu $t_{70} = 18\,°\mathrm{C} + 7 \cdot 5{,}7\,°\mathrm{C} = 57{,}9\,°\mathrm{C} \doteq 58\,°\mathrm{C}$. **1 bod**

c) Zvětšíme-li množství kapaliny 1,5×, tedy na 300 g, poroste teplota 1,5× pomaleji, rozdíly teplot Δt budou 1,5× menší. Dopočítáme hodnoty do tabulky:

τ/s	0	10	20	30	40	50	60
t/°C	18,0	21,8	25,6	29,4	33,2	37,0	40,8

Graf závislosti teploty na čase je na obr. 1b (spodní, modrá úsečka). **3 body**

d) Protože teplo k ohřátí kapaliny dodává vařič po dobu τ s účinností $\eta = 80\,\%$, můžeme napsat rovnici

$$\eta P\tau = mc\Delta t.$$

Čas τ můžeme přitom zvolit různě a vybrat k němu odpovídající rozdíl teplot Δt, níže volíme $\tau = 60\,\mathrm{s}$, $\Delta t = 52{,}2\,°\mathrm{C} - 18\,°\mathrm{C} = 34{,}2\,°\mathrm{C}$. Z předcházející rovnice vyjádříme

$$c = \frac{\eta P\tau}{m\Delta t} = \frac{0{,}8 \cdot 600\,\mathrm{W} \cdot 60\,\mathrm{s}}{0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 34{,}2\,°\mathrm{C}} \doteq 4\,210{,}5\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \doteq 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot °C)}$$ **3 body**

Zahřívanou kapalinou je zřejmě voda.

FO60EF1–5: Padesátimetrový bazén

a) Průměrná hloubka bazénu v mělčí části je $H_1 = (h_1 + h_2)/2 = (1{,}2\,\mathrm{m} + 1{,}5\,\mathrm{m})/2 = 1{,}35\,\mathrm{m}$, v hlubší části $H_2 = (h_2 + h_3)/2 = (1{,}5\,\mathrm{m} + 4{,}5\,\mathrm{m})/2 = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Objem vody v bazénu bude

$$V = \frac{l}{2} sH_1 + \frac{l}{2} sH_2 = \frac{l}{2} s(H_1 + H_2) =$$
$$= \frac{50\,\mathrm{m}}{2} \cdot 15\,\mathrm{m} \cdot (1{,}35\,\mathrm{m} + 3{,}0\,\mathrm{m}) = 1\,631{,}25\,\mathrm{m}^3 \doteq 1\,600\,000\,\mathrm{l}.$$

3 body

Poznámka: Svislý profil bazénu má tvar dvou lichoběžníků o výšce $l/2$, při výpočtu plochy lze proto vycházet i ze vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníka

$$V = \frac{l}{2} s\frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{l}{2} s\frac{h_2 + h_3}{2}.$$

b) Přítok vody do bazénu je $2A = 2 \cdot 5\,\text{litrů/s} = 10\,\text{litrů/s}$. Bazén se tak naplní za dobu

$$\tau = \frac{V}{2A} = \frac{1\,631\,250\,\mathrm{l}}{10\,\mathrm{l/s}} = 163\,125\,\mathrm{s} = 45{,}312\,5\,\mathrm{h} \doteq 45\,\mathrm{h}.$$ **1 bod**

Poznámka: Objemový průtok bývá většinou označen jako Q_V; aby nedošlo k záměně s teplem, volíme v zadání a řešení označení A.

c) Teplo potřebné k ohřátí vody je dáno vztahem

$$Q = \varrho Vc\Delta t = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 1\,631{,}25\,\mathrm{m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot °C)} \cdot 10\,°\mathrm{C} = 68\,512\,500\,000\,\mathrm{J} \doteq 69\,\mathrm{GJ}.$$

2 body

d) Označme m_1 hmotnost studené a m_2 hmotnost teplé vody. Musí platit:

$$m_1 + m_2 = m = \varrho V = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 1\,631{,}25\,\mathrm{m^3} = 1\,631\,250\,\mathrm{kg} \doteq 1\,600\,000\,\mathrm{kg},$$

a také

$$m_1 c(t - t_1) = m_2 c(t_2 - t), \quad \Longrightarrow \quad m_1 (25\,°\mathrm{C} - 10\,°\mathrm{C}) = m_2 (60\,°\mathrm{C} - 25\,°\mathrm{C}),$$

odkud vychází poměr

$$15m_1 = 35m_2, \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{7}{3}.$$

Celkovou hmotnost vody m máme rozdělit v poměru 3:7, vychází

$$m_1 = \frac{7}{7+3}m = \frac{7}{10} \cdot 1\,600\,000\,\mathrm{kg} = 1\,120\,000\,\mathrm{kg} \doteq 1\,100\,000\,\mathrm{kg},$$

$$m_2 = \frac{3}{7+3}m = \frac{3}{10} \cdot 1\,600\,000\,\mathrm{kg} = 480\,000\,\mathrm{kg}.$$

4 body

FO60EF1–6: Dvacet tisíc mil pod mořem

a) „Dvacet tisíc mil“ ve Vernově pojetí odpovídá vzdálenosti

$$d = 20\,000 \cdot 4\,\mathrm{km} = 80\,000\,\mathrm{km}.$$ **1 bod**

Tato vzdálenost odpovídá přibližně dvojnásobku obvodu Země.

b) Při plném ponoření musí být hmotnost ponorky rovna hmotnosti mořské vody o hustotě $\varrho_\mathrm{m} = 1{,}028\,\mathrm{g/cm^3} = 1\,028\,\mathrm{kg/m^3}$ stejného („vytlačeného“) objemu

$$m = \varrho_\mathrm{m} V = 1\,028\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 1\,500\,\mathrm{m^3} = 1\,542\,000\,\mathrm{kg} \doteq 1\,500\,\mathrm{t}.$$ **2 body**

c) Jestliže nad hladinou vyčnívá 1/10 objemu ponorky, pod hladinou zůstane ponořených zbylých 9/10 objemu. Hmotnost prázdné ponorky bude rovna hmotnosti mořské vody o objemu ponořené části, takže můžeme psát

$$m_1 = \frac{9}{10}\varrho_\mathrm{m} V = \frac{9}{10}m = \frac{9}{10} \cdot 1\,542\,000\,\mathrm{kg} = 1\,387\,800\,\mathrm{kg} \doteq 1\,400\,\mathrm{t}.$$ **2 body**

d) Rozdíl tlaků v hloubce a na hladině je dán hydrostatickým tlakem mořské vody

$$p = h\varrho_\mathrm{m} g = 16\,000\,\mathrm{m} \cdot 1\,028\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 161\,190\,400\,\mathrm{Pa} \doteq 160\,\mathrm{MPa},$$

což odpovídá hodnotě asi $1\,590\times$ větší než je normální atmosférický tlak vzduchu $p_\mathrm{n} = 101\,325\,\mathrm{Pa}$. Podle současných měření je největší známá hloubka oceánu $10\,994\,\mathrm{m}$ (Marianský příkop v Tichém oceánu), takže do zadané hloubky $16\,000\,\mathrm{m}$ se Nautilus na Zemi zřejmě ponořit nemohl. K ponoření do takové hloubky se navíc nepoužívají běžné ponorky, ale speciální plavidla odolávající vysokému tlaku – batyskafy (v nich byl proveden sestup ke dnu Marianského příkopu v letech 1960 i 2012). **3 body**

e) Pro rychlost výstupu ponorky z hloubky $h_1 = 13\,000\,\mathrm{m} = 13\,\mathrm{km}$ za čas $t = 4\,\mathrm{min} = 1/15\,\mathrm{h}$ vychází

$$v = \frac{h_1}{t} = \frac{13\,\mathrm{km}}{\frac{1}{15}\,\mathrm{h}} = 195\,\mathrm{km/h} \doteq 200\,\mathrm{km/h}.$$

Jde o rychlost vysokou (více než $54\,\mathrm{m/s}$) a pro výstup ponorky prakticky nerealizovatelnou; podle Wikipedie např. batyskaf Deepsea Challenger, s nímž na dno Marianského příkopu v roce 2012 sestoupil americký režisér a amatérský oceánograf James Cameron, vystoupil zpět na hladinu za 70 minut, tj. rychlostí

$$v_1 = \frac{10\,994\,\mathrm{m}}{70 \cdot 60\,\mathrm{s}} \doteq 2{,}6\,\mathrm{m/s} \doteq 9{,}4\,\mathrm{km/h},$$

více než $20\times$ nižší. **2 body**

FO60EF1–7: Nerovnoramenné váhy

a) Podle podmínky rovnováhy pro váhy ve vzduchu platí

$$V_1 \varrho_1 l_1 g = V_2 \varrho_2 l_2 g; \tag{1}$$

podobně podle podmínky rovnováhy po záměně těles a ponoření do vody o hustotě ϱ máme

$$V_1 (\varrho_1 - \varrho) l_2 g = V_2 (\varrho_2 - \varrho) l_1 g. \tag{2}$$

Podělením rovnic (1) a (2) se vykrátí neznámé objemy V_1 a V_2 a postupně dostaneme

$$\frac{\varrho_1 l_1}{(\varrho_1 - \varrho) l_2} = \frac{\varrho_2 l_2}{(\varrho_2 - \varrho) l_1}, \qquad \frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{(\varrho_1 - \varrho)}{(\varrho_2 - \varrho)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\,700\,\mathrm{kg/m^3}}{11\,340\,\mathrm{kg/m^3}} \cdot \frac{\left(11\,340\,\mathrm{kg/m^3} - 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\right)}{\left(2\,700\,\mathrm{kg/m^3} - 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\right)}} \doteq 1{,}203\,4 \doteq 1{,}2.$$

5 bodů

b) Z rovnice (1) vyjádříme

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\varrho_1 l_1}{\varrho_2 l_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{(\varrho_1 - \varrho)}{(\varrho_2 - \varrho)}} = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{(\varrho_1 - \varrho)}{(\varrho_2 - \varrho)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{11\,340\,\mathrm{kg/m^3}}{2\,700\,\mathrm{kg/m^3}} \cdot \frac{\left(11\,340\,\mathrm{kg/m^3} - 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\right)}{\left(2\,700\,\mathrm{kg/m^3} - 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\right)}} \doteq 5{,}054\,3 \doteq 5{,}1.$$

5 bodů

FO60EF1–8: Atletický trénink

a) Atlet musí rychlostí v_2 urazit o vzdálenost d více než trenér. Vzhledem k trenérovi se pohybuje rychlostí $v_2 - v_1$. K trenérovi doběhne za dobu

$$t_1 = \frac{d}{v_2 - v_1} = \frac{100\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s} - 1\,\mathrm{m/s}} = 50\,\mathrm{s}.$$

Protože trenér mezitím ušel vzdálenost $d_1 = v_1 t_1 = 1\,\mathrm{m/s} \cdot 50\,\mathrm{s} = 50\,\mathrm{m}$, bude to ve vzdálenosti $d' = d + d_1 = 100\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} = 150\,\mathrm{m}$ od místa startu a cíle.

3 body

b) Podruhé atlet doběhne trenéra za dobu

$$t_2 = \frac{L}{v_2 - v_1} = \frac{400\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s} - 1\,\mathrm{m/s}} = 200\,\mathrm{s},$$

tj. celkem v čase $t_1 + t_2 = 50\,\mathrm{s} + 200\,\mathrm{s} = 250\,\mathrm{s}$ od startu. Protože trenér za tuto dobu ujde dalších $d_2 = v_1 t_2 = 1\,\mathrm{m/s} \cdot 200\,\mathrm{s} = 200\,\mathrm{m}$, bude místo setkání ve vzdálenosti $d + d_1 + d_2 = 100\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} + 200\,\mathrm{m} = 350\,\mathrm{m}$ od startu a zároveň ve vzdálenosti $L - (d + d_1 + d_2) = 400\,\mathrm{m} - 350\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{m}$ před cílem. Do cíle trenér dojde za dalších

$$t_3 = \frac{50\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} = 50\,\mathrm{s},$$

atlet za tuto dobu uběhne vzdálenost $d_3 = v_2 t_3 = 3\,\mathrm{m/s} \cdot 50\,\mathrm{s} = 150\,\mathrm{m}$; bude tedy v místě ve vzdálenosti $d + d_1 + d_2 + d_3 - L = 100\,\mathrm{m}$ za cílem. **3 body**

c) Návrat do místa startu trvá atletovi dobu

$$t_4 = \frac{d + d_1}{v_2} = \frac{150\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s}} = 50\,\mathrm{s}.$$

Trenér je v té době ve vzdálenosti $d_4 = d + d_1 + v_1 t_4 = 100\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m/s} \cdot 50\,\mathrm{s} = 200\,\mathrm{m}$. Na doběhnutí k němu potřebuje atlet dobu

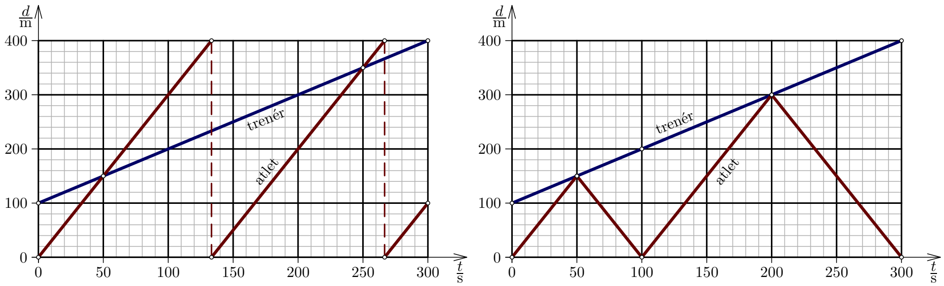
$$t_5 = \frac{d_4}{v_2 - v_1} = \frac{200\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s} - 1\,\mathrm{m/s}} = 100\,\mathrm{s};$$

trenér mezitím ušel $d_5 = v_1 t_5 = 1\,\mathrm{m/s} \cdot 100\,\mathrm{s} = 100\,\mathrm{m}$, bude tedy ve vzdálenosti $d_4 + d_5 = 200\,\mathrm{m} + 100\,\mathrm{m} = 300\,\mathrm{m}$ od startu. Na běh zpět potřebuje atlet dobu

$$t_6 = \frac{300\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s}} = 100\,\mathrm{s},$$

za tuto dobu ujde trenér opět vzdálenost $d_5 = 100\,\mathrm{m}$ a celkem bude ve vzdálenosti $d_4 + 2d_5 = 200\,\mathrm{m} + 2 \cdot 100\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{m} = L$ od startu a dojde tak do cíle. V místě startu a cíle se trenér s atletem setká za dobu $t_\mathrm{c} = t_1 + t_4 + t_5 + t_6 = 2t_1 + 2t_5 = 2 \cdot 50\,\mathrm{s} + 2 \cdot 100\,\mathrm{s} = 300\,\mathrm{s}$. Atlet za tuto dobu uběhl vzdálenost $d_\mathrm{c} = v_2 t_\mathrm{c} = 3\,\mathrm{m/s} \cdot 300\,\mathrm{s} = 900\,\mathrm{m}$. **4 body**

Úlohu je možné řešit i graficky, příklad možného znázornění je na obr. 2.



a) K částem a) a b) b) K části c)

Obr. 2: Grafické řešení k úloze 8

FO60EF1–9: Led ve sklenici

a) Vnitřní poloměr sklenice $r_1 = r - d = 32\,\mathrm{mm} - 1\,\mathrm{mm} = 31\,\mathrm{mm} = 3{,}1\,\mathrm{cm}$. Objem skla vychází jako rozdíl objemů válců o poloměrech $r = 32\,\mathrm{mm} = 3{,}2\,\mathrm{cm}$ a r_1 s výškou $v = 10{,}5\,\mathrm{cm}$; k tomuto rozdílu pak musíme přičíst objem válce o poloměru r_1 a výšce $d = 1\,\mathrm{mm} = 0{,}1\,\mathrm{cm}$ tvořícího vnitřní část dna sklenice. Ve výsledku dostáváme

$$\begin{aligned} V_\mathrm{S} &= \pi\left(r^2 - r_1^2\right) v + \pi r_1^2 d = \\ &= \pi \cdot \left[(3{,}2\,\mathrm{cm})^2 - (3{,}1\,\mathrm{cm})^2\right] \cdot 10{,}5\,\mathrm{cm} + \pi \cdot (3{,}1\,\mathrm{cm})^2 \cdot 0{,}1\,\mathrm{cm} \doteq \\ &\doteq 23{,}801\,\mathrm{cm}^3 \doteq 24\,\mathrm{cm}^3. \end{aligned}$$

Hmotnost sklenice při hustotě $\varrho_\mathrm{S} = 2\,500\,\mathrm{kg/m^3} = 2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$ potom vychází

$$m_\mathrm{S} = \varrho_\mathrm{S} V_\mathrm{S} = 2{,}5\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 23{,}801\,\mathrm{cm}^3 \doteq 59{,}502\,\mathrm{g} \doteq 60\,\mathrm{g}.$$ **4 body**

Poznámka: Objem skla V_S můžeme vypočítat také jako rozdíl objemu plného válce $\pi r^2 v$ a vnitřního objemu sklenice $\pi r_1^2 (v-d)$, výsledek je pochopitelně stejný.

b) Vnitřní objem sklenice je

$$V_1 = \pi r_1^2 (v-d) = \pi \cdot (3{,}1\,\mathrm{cm})^2 (10{,}5\,\mathrm{cm} - 0{,}1\,\mathrm{cm}) \doteq 313{,}98\,\mathrm{cm}^3 \doteq 310\,\mathrm{ml}.$$

Do sklenice se vejde ještě $V_2 = V_1 - V_\mathrm{v} = 313{,}98\,\mathrm{ml} - 150\,\mathrm{ml} = 163{,}98\,\mathrm{ml} \doteq 160\,\mathrm{ml}$ vody, můžeme tedy přidat led o hmotnosti vody s tímto objemem (objem ledu bude sice větší, ale led bude díky nižší hustotě plavat u hladiny a část ledu vyčnívat nad hladinou) o hmotnosti

$$m_\mathrm{l} = \varrho_\mathrm{v} V_2 = 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 163{,}98\,\mathrm{cm}^3 = 163{,}98\,\mathrm{g} \doteq 160\,\mathrm{g}.$$

2 body

c) Na roztátí ledu o hmotnosti $m_\mathrm{l} = 163{,}98\,\mathrm{g} = 0{,}163\,98\,\mathrm{kg}$ je zapotřebí skupenské teplo tání

$$L_\mathrm{t} = m_\mathrm{l} l_\mathrm{t} = 0{,}163\,98\,\mathrm{kg} \cdot 332\,\mathrm{kJ/kg} = 54{,}441\,\mathrm{kJ} \doteq 54\,000\,\mathrm{J}.$$

Voda o objemu $V_\mathrm{v} = 150\,\mathrm{ml}$ a hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{g/cm^3}$ má hmotnost

$$m_\mathrm{v} = \varrho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} = 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 150\,\mathrm{cm}^3 = 150\,\mathrm{g} = 0{,}15\,\mathrm{kg}$$

při ochlazení na teplotu tání t_0 může dodat teplo

$$Q_1 = m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} (t - t_0) = 0{,}15\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (21\,^\circ\mathrm{C} - 0\,^\circ\mathrm{C}) = 13\,230\,\mathrm{J} \doteq 13\,\mathrm{kJ},$$

sklo při ochlazení na teplotu t_0 může dodat teplo

$$Q_2 = m_\mathrm{s} c_\mathrm{s} (t - t_0) = 0{,}059\,502\,\mathrm{kg} \cdot 1\,000\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (21\,^\circ\mathrm{C} - 0\,^\circ\mathrm{C}) \doteq 1\,249{,}5\,\mathrm{J} \doteq 1{,}2\,\mathrm{kJ}.$$

Protože $L_\mathrm{t} > Q_1 + Q_2$, teplo dodané vodou a sklem na roztátí veškerého ledu nestačí. Proto bude výsledná teplota ve sklenici $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ a roztaje jen led o hmotnosti

$$m = \frac{Q_1 + Q_2}{l_\mathrm{t}} = \frac{13\,230\,\mathrm{J} + 1\,249{,}5\,\mathrm{J}}{332\,000\,\mathrm{J/kg}} \doteq 0{,}043\,613\,\mathrm{kg} \doteq 44\,\mathrm{g}.$$

Ve sklenici zbude $m_\mathrm{l} - m = 163{,}98\,\mathrm{g} - 43{,}613\,\mathrm{g} \doteq 120{,}37\,\mathrm{g} \doteq 120\,\mathrm{g}$ ledu.

4 body

FO60EF1–10: Odporový drát

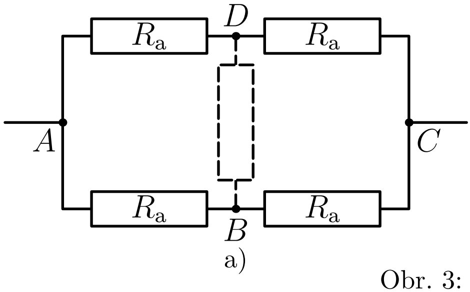
a) Připojíme-li mezi body AC zdroj napětí, můžeme obvod překreslit podle schématu na obr. 3a. Protože v horní i dolní větvi jsou rezistory se stejným odporem, bude napětí v obou dvou větvích klesat stejně; z důvodu symetrie tak bude mezi body B a D nulové napětí a úhlopříčným vodičem nepoteče proud. To znamená, že přítomnost úhlopříčného vodiče nemá vliv na celkový odpor mezi body AC a lze ho vynechat, stačí uvažovat pouze rezistory s odporem R_a odpovídající stranám čtverce.

Odpor každé větve je $2R_\mathrm{a} = 2 \cdot 12\,\Omega = 24\,\Omega$. Celkový odpor dvou paralelně spojených stejných větví je poloviční, tj. $R_{AC} = R_\mathrm{a} = 12\,\Omega$. **3 body**

b) Nejprve podle Pythagorovy věty určíme délku úhlopříčky

$$u = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = 108\,\mathrm{cm} \cdot \sqrt{2} \doteq 152{,}74\,\mathrm{cm} \doteq 153\,\mathrm{cm}.$$

Odpor vodiče je přímo úměrný jeho délce, proto odpor úhlopříčného vodiče R_u



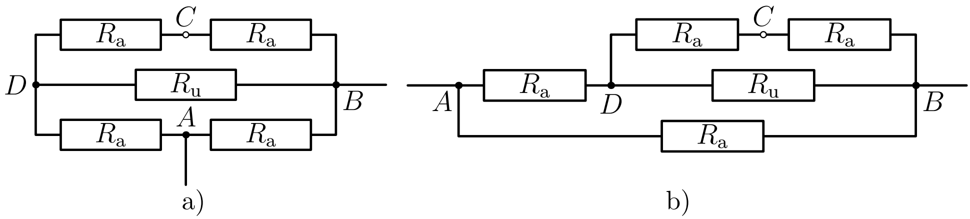
Obr. 3: K úloze 10

bude též $\sqrt{2}\times$ větší než odpor R_a

$$R_u = \sqrt{2}R_a = \sqrt{2} \cdot 12\,\Omega \doteq 16{,}971\,\Omega \doteq 17\,\Omega.$$

Obvod pak můžeme nahradit zapojením rezistorů podle schématu na obr. 3b. K předchozímu zapojení o celkovém odporu R_a je paralelně připojen rezistor o odporu R_u. Celkový odpor potom vychází

$$R_{BD} = \frac{R_a R_u}{R_a + R_u} = \frac{12\,\Omega \cdot 17\,\Omega}{12\,\Omega + 17\,\Omega} \doteq 7{,}034\,5\,\Omega \doteq 7{,}0\,\Omega.$$ **3 body**



Obr. 4: K úloze 10

c) Zapojení mezi body AB můžeme názorněji postupně překreslit podle schématu na obr. 4a a 4b. Horní složená větev na obr. 4b má odpor

$$R' = R_a + \frac{2R_a R_u}{2R_a + R_u} = 12\,\Omega + \frac{2 \cdot 12\,\Omega \cdot 17\,\Omega}{2 \cdot 12\,\Omega + 17\,\Omega} \doteq 21{,}951\,\Omega.$$

Celkový odpor pak vychází

$$R_{AB} = \frac{R' R_a}{R' + R_a} = \frac{21{,}951\,\Omega \cdot 12\,\Omega}{21{,}951\,\Omega + 12\,\Omega} \doteq 7{,}758\,6\,\Omega \doteq 7{,}8\,\Omega.$$ **4 body**

FO60EF1–11: Experimentální úloha: hustota

Úloha je záměrně zadána jako otevřená a neurčuje přesný postup ani použité pomůcky; obojí by měli žáci navrhnout sami a bude zřejmě jiný pro olej a jiný pro polystyren. Tabulkové hodnoty hustoty jsou přibližně:

- kámen (žula, křemen): $\varrho_p = 2\,600\,\mathrm{kg/m^3}$;
- pěnový polystyren: $\varrho_p = 30\,\mathrm{kg/m^3} - 150\,\mathrm{kg/m^3}$;
- olej: $\varrho_o = 920\,\mathrm{kg/m^3}$.

FO60EF1–12: Experimentální úloha: radioaktivita

a) Příklad vyplnění tabulky:

	1. série	2. série	3. série	4. série	5. série	Aritmetický průměr	Teoretický předpoklad
0	64	64	64	64	64	64,0	64
T	26	32	33	36	29	31,2	32
$2T$	17	18	18	15	15	16,6	16
$3T$	8	8	10	10	8	8,8	8
$4T$	4	6	5	5	3	4,6	4
$5T$	3	2	2	2	1	2,0	2
$6T$	3	2	1	2	0	1,6	1
$7T$	1	1	0	2	–	0,8	–
$8T$	0	1	–	1	–	0,4	–
$9T$	–	1	–	1	–	0,4	–
$10T$	–	0	–	1	–	0,2	–

Z porovnání hodnot v posledních dvou sloupcích plyne, že změřený počet poměrně dobře odpovídá teoretické předpovědi. **6 bodů**

Poznámka: Provedením mnohem většího počtu sérií hodů se mnohem více přiblížíme teoretickým hodnotám.

b)
- Pro aktinium $^{225}_{89}$Ac s poločasem přeměny 10 dní odpovídá 30 dnů třem poločasům přeměny, z původního počtu jader zůstane přibližně $1/2^3 = 1/8 = 12{,}5\,\% \doteq 13\,\%$.
- Pro plynný radon $^{222}_{86}$Rn s poločasem přeměny 3,8 dne odpovídá 30 dnů přibližně počtu $30/3{,}8 \doteq 7{,}894\,7 \doteq 8$ poločasů přeměny, z původního počtu jader zůstane asi $1/2^8 = 1/256 \doteq 0{,}390\,62\,\% \doteq 0{,}39\,\%$.
- Pro polonium $^{218}_{84}$Po s poločasem přeměny 3 minuty odpovídá 30 dnů počtu $30 \cdot 24 \cdot 60/3 = 14\,400$ poločasů přeměny, zůstane přibližně $1/2^{14400} = 0\,\%$ původního počtu jader (tj. žádné jádro) – ve jmenovateli je tak obrovské číslo, že ani nelze zobrazit na displeji kalkulátoru.
- Pro radium $^{226}_{88}$Ra s poločasem přeměny 1 600 let odpovídá 30 dnů počtu $30/\,(365 \cdot 1\,600) \doteq 0{,}000\,051\,370 \doteq 0{,}000\,051$ poločasů přeměny, zůstane přibližně $1/2^{0.000051} \doteq 0{,}999\,96 \doteq 100\,\%$ původního počtu jader. **4 body**