# Řešení úloh školního kola 60. ročníku Fyzikální olympiády

*Kategorie G – Archimédiáda*

Autoři úloh: D. Kaštilová (1–2, 5), J. Thomas (3–4)

## FO60G1–1: Štaflík a Špagetka na výletě

a) Tabulka s vyplněnými hodnotami

| | Cesta lesem | Cesta do kopce | Odpočinek | Cesta z kopce | Poslední úsek |
|---|---|---|---|---|---|
| Dráha/m | 5 400 | 2 100 | 0 | 4 800 | 3 600 |
| Rychlost/(m/s) | 1,0 | 0,5 | 0 | 4,0 | 1,5 |
| Čas/min | 90 | 70 | 30 | 20 | 40 |

Štaflík a Špagetka šli celkem dobu

$$t = 10{:}40\,\mathrm{h} - 6{:}30\,\mathrm{h} = 4\,\mathrm{h}\ 10\,\mathrm{min} = 250\,\mathrm{min} = 15\,000\,\mathrm{s}.$$

Dopočítané veličiny v jednotlivých úsecích jsou:

1. $t_1 = 1{,}5\,\mathrm{h} = 90\,\mathrm{min} = 5\,400\,\mathrm{s}$, $s_1 = v_1 t_1 = 1\,\mathrm{m/s} \cdot 5\,400\,\mathrm{s} = 5\,400\,\mathrm{m}$;
2. $s_2 = 2{,}1\,\mathrm{km} = 2\,100\,\mathrm{m}$, $t_2 = s_2/v_2 = 2\,100\,\mathrm{m}/0{,}5\,\mathrm{m/s} = 4\,200\,\mathrm{s} = 70\,\mathrm{min}$;
3. $t_3 = 30\,\mathrm{min} = 1\,800\,\mathrm{s}$, $s_3 = v_3 t_3 = 0\,\mathrm{m/s} \cdot 5\,400\,\mathrm{s} = 0\,\mathrm{m}$;
4. $t_4 = 20\,\mathrm{min} = 1\,200\,\mathrm{s}$, $s_4 = 4{,}8\,\mathrm{km} = 4\,800\,\mathrm{m}$,
   $v_4 = s_4/t = 4\,800\,\mathrm{m}/1\,200\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{m/s}$;
5. $v_5 = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$, $t_5 = t - (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) =$
   $= 250\,\mathrm{min} - (90\,\mathrm{min} + 70\,\mathrm{min} + 30\,\mathrm{min} + 20\,\mathrm{min}) = 40\,\mathrm{min} = 2\,400\,\mathrm{s}$,
   $s_5 = v_5 t_5 = 1{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 2\,400\,\mathrm{s} = 3\,600\,\mathrm{m}$. **5 bodů**

b) Oba výletníci urazili celkem dráhu

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 5\,400\,\mathrm{m} + 2\,100\,\mathrm{m} + 0\,\mathrm{m} + 4\,800\,\mathrm{m} + 3\,600\,\mathrm{m} = 15\,900\,\mathrm{m}.$$

Pro průměrnou rychlost dostáváme

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{15\,900\,\mathrm{m}}{15\,000\,\mathrm{s}} = 1{,}06\,\mathrm{m/s} \doteq 1{,}1\,\mathrm{m/s}.$$ **2 body**

c) Graf je na obr. 1, namísto minut lze na časové ose samozřejmě použít i např. sekundy. **3 body**

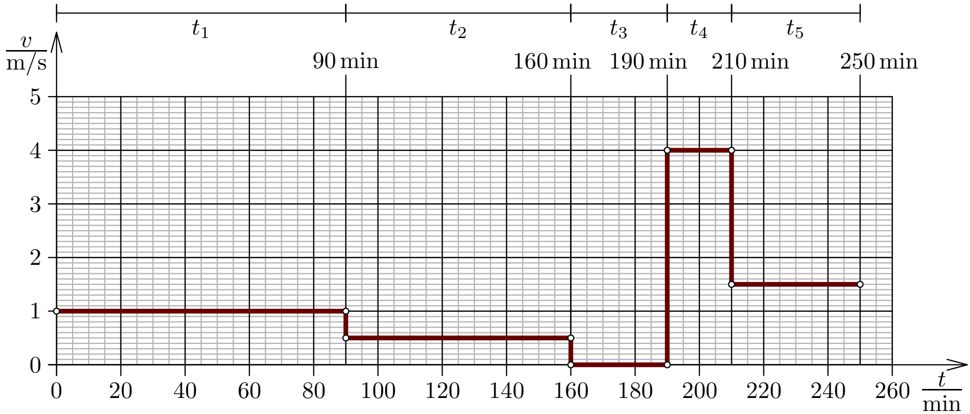
## FO60G1–2: Štaflík a Špagetka na stavbě

a) Nejprve vypočteme objem dna a bočních stěn vozíku. Objem dna korby vychází

$$V_1 = (a - 2d)\,(b - 2d)\,d = 36\,\mathrm{cm} \cdot 26\,\mathrm{cm} \cdot 2\,\mathrm{cm} = 1\,872\,\mathrm{cm}^3,$$

objem delší bočnice

$$V_2 = acd = 40\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot 2\,\mathrm{cm} = 640\,\mathrm{cm}^3,$$




Obr. 1: Graf k úloze 1

objem kratší bočnice

$$V_3 = (b - 2d)cd = 26\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm} \cdot 2\,\mathrm{cm} = 416\,\mathrm{cm}^3.$$

Celkový objem korby pak bude

$$V_\mathrm{k} = V_1 + 2\,(V_2 + V_3) = 1\,872\,\mathrm{cm}^3 + 2 \cdot \left(640\,\mathrm{cm}^3 + 416\,\mathrm{cm}^3\right) = 3\,984\,\mathrm{cm}^3.$$

Hmotnost korby potom vychází

$$m_\mathrm{k} = V_\mathrm{k}\varrho = 3\,984\,\mathrm{cm}^3 \cdot 0{,}6\,\mathrm{g/cm}^3 = 2\,390{,}4\,\mathrm{g} \doteq 2{,}4\,\mathrm{kg},$$

hmotnost prázdného vozíku s tyčkou a kolečky

$$m_\mathrm{v} = m_\mathrm{k} + m_\mathrm{t} + 2m_\mathrm{o} = \\ = 2{,}390\,4\,\mathrm{kg} + 0{,}3\,\mathrm{kg} + 2 \cdot 0{,}4\,\mathrm{kg} = 3{,}490\,4\,\mathrm{kg} \doteq 3{,}5\,\mathrm{kg}.$$

**4 body**

*Poznámka:* Objem korby lze vypočítat i jako rozdíl objemů dvou kvádrů, jednoho („vnějšího“) o hranách $a = 40\,\mathrm{cm}$, $b = 30\,\mathrm{cm}$, $c = 8\,\mathrm{cm}$ a s objemem $V_1 = abc = 40\,\mathrm{cm} \cdot 30\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm} = 9\,600\,\mathrm{cm}^3$, a druhého („vnitřního“) o hranách $a - 2d = 36\,\mathrm{cm}$, $b - 2d = 26\,\mathrm{cm}$, $c - d = 6\,\mathrm{cm}$ s objemem

$$V_2 = (a - 2d)(b - 2d)(c - d) = 36\,\mathrm{cm} \cdot 26\,\mathrm{cm} \cdot 6\,\mathrm{cm} = 5\,616\,\mathrm{cm}^3;$$

potom můžeme psát $V_\mathrm{k} = V_1 - V_2 = 9\,600\,\mathrm{cm}^3 - 5\,616\,\mathrm{cm}^3 = 3\,984\,\mathrm{cm}^3$.

b) Vozík působí na vodorovnou cestu tlakovou silou

$$F = m_\mathrm{v}g = 3{,}490\,4\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} \doteq 34{,}206\,\mathrm{N} \doteq 34\,\mathrm{N}.$$

Celková plocha dotyku všech koleček vychází

$$S = 4S_1 = 4 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 = 16\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}001\,6\,\mathrm{m}^2.$$

Pro tlak tak dostáváme

$$p_1 = \frac{F}{S} = \frac{34{,}206\,\mathrm{N}}{0{,}001\,6\,\mathrm{m}^2} \doteq 21\,379\,\mathrm{Pa} \doteq 21\,\mathrm{kPa}. \qquad \textbf{2 body}$$

c) Objem písku odpovídá vnitřnímu objemu vozíku

$$V_\mathrm{p} = (a - 2d)(b - 2d)(c - d) = 36\,\mathrm{cm} \cdot 26\,\mathrm{cm} \cdot 6\,\mathrm{cm} = 5\,616\,\mathrm{cm}^3$$

Hmotnost písku vypočítáme pomocí jeho objemu a hustoty

$$m_\mathrm{p} = V_\mathrm{p}\varrho_\mathrm{p} = 5\,616\,\mathrm{cm}^3 \cdot 1{,}5\,\mathrm{g/cm}^3 = 8\,424\,\mathrm{g} \doteq 8{,}4\,\mathrm{kg} \qquad \textbf{2 body}$$

*Poznámka:* V závislosti na předchozím výpočtu objemu dřevěné korby lze objem písku vypočítat i jako rozdíl mezi objemem „vnějšího“ kvádru o hranách $a = 40\,\mathrm{cm}$, $b = 30\,\mathrm{cm}$, $c = 8\,\mathrm{cm}$ o objemu $V_1 = 9\,600\,\mathrm{cm}^3$ a vypočteným objemem korby $V_\mathrm{k} = 3\,984\,\mathrm{cm}^3$

$$V_\mathrm{p} = V_1 - V_\mathrm{k} = 9\,600\,\mathrm{cm}^3 - 3\,984\,\mathrm{cm}^3 = 5\,616\,\mathrm{cm}^3.$$

d) Vozík s pískem bude působit na povrch cesty tlakovou silou

$$F_\mathrm{p} = (m_\mathrm{v} + m_\mathrm{p})\,g = (3{,}490\,4\,\mathrm{kg} + 8{,}424\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 116{,}760\,\mathrm{N} \doteq 120\,\mathrm{N}.$$

Tlak vozíku s pískem na povrch cesty bude

$$p_2 = \frac{F_\mathrm{p}}{S} = \frac{116{,}760\,\mathrm{N}}{0{,}001\,6\,\mathrm{m}^2} = 72\,975\,\mathrm{Pa} \doteq 73\,\mathrm{kPa} \qquad \textbf{2 body}$$

## FO60G1–3: Tlak vzduchu

a) Jde o dny 1. 9. a 5. 9. **2 body**

b) K největšímu poklesu došlo 4. 9. o 9 hPa a 16. 9. rovněž o 9 hPa. **2 body**

c) K největšímu vzestupu tlaku došlo 14. 9. o 12 hPa. **2 body**

d) Tlak byl stálý dne 19. 9. **2 body**

e) Je o dny 1. 9., 7.–10. 9. a 15. 9., tj. celkem $1 + 4 + 1 = 6$ dní. **2 body**

## FO60G1–4: Cesta s padacím mostem

a) Vítek musí jet alespoň takovou rychlostí $v_\mathrm{min}$, aby byl v bodě $P$ u padacího mostu dříve, než se most zvedne. Musí tedy urazit dráhu $d_1 = 14\,\mathrm{km}$ do 12:05, tj. za čas $t_1 = 65\,\mathrm{min} = 13/12\,\mathrm{h}$ rychlostí

$$v_\mathrm{min} = \frac{d_1}{t_1} = \frac{14\,\mathrm{km}}{\frac{13}{12}\,\mathrm{h}} \doteq 12{,}923\,\mathrm{km/h} \doteq 13\,\mathrm{km/h}.$$

V poledne, po hodině jízdy touto rychlostí, by byl ve vzdálenosti asi 13 km/h, padací most by podle předchozí úvahy přejížděl ve 12:05 h.
Rytíř ale zároveň nemůže jet tak rychle, aby byl v poledne, tj. za čas $t_1 = 1\,\mathrm{h}$, za 16. kilometrem, tj. ve vzdálenosti $d_2 = 16\,\mathrm{km}$. Může tedy jet nejvýše rychlostí

$$v_{\max} = \frac{d_2}{t_2} = \frac{16\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 16\,\mathrm{km/h}.$$

Touto rychlostí by v poledne byl ve vzdálenosti 16 km a padací most by přejížděl za čas

$$t_2' = \frac{d_1}{v_{\max}} = \frac{14\,\mathrm{km}}{16\,\mathrm{km/h}} = \frac{7}{8}\,\mathrm{h} = 0{,}875\,\mathrm{h} \doteq 53\,\mathrm{min}$$

po vyjetí z hradu, tj. v 11:53 h.
Můžeme ověřit, že kdyby chtěl být u padacího mostu v okamžiku jeho otevření, za čas $t_3 = 50\,\mathrm{min} = 5/6\,\mathrm{h}$, musel by jet rychlostí

$$v_1 = \frac{d_1}{t_3} = \frac{14\,\mathrm{km}}{\frac{5}{6}\,\mathrm{h}} = 16{,}8\,\mathrm{km/h} \doteq 17\,\mathrm{km/h},$$

to by ale v poledne, po hodině jízdy, byl až za 16. kilometrem a nemohl by se s Janem setkat v oblasti mezi 12. a 16. kilometrem. **5 bodů**

b) Při rychlosti $v_{\max} = 16\,\mathrm{km/h}$ bude Vítek na 12. kilometru, tj. ve vzdálenosti $d_3 = 12\,\mathrm{km}$ za čas

$$t_4 = \frac{d_3}{v_{\max}} = \frac{12\,\mathrm{km}}{16\,\mathrm{km/h}} = \frac{3}{4}\,\mathrm{h} = 45\,\mathrm{min},$$

tj. v 11:45 h. Nižší rychlostí $v_2 = 10\,\mathrm{km/h}$ za čas $t_5 = 15\,\mathrm{min} = \frac{1}{4}\,\mathrm{h}$ zbývající do poledne ujede vzdálenost

$$d_4 = v_2 t_5 = 10\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{1}{4}\,\mathrm{h} = 2{,}5\,\mathrm{km},$$

v poledne tedy bude ve vzdálenosti $s_1 = d_3 + d_4 = 12\,\mathrm{km} + 2{,}5\,\mathrm{km} = 14{,}5\,\mathrm{km} \doteq 15\,\mathrm{km}$ od Vítkova kamene. V čase zpomalení mu k mostu zbývalo $d_5 = d_1 - d_3 = 14\,\mathrm{km} - 12\,\mathrm{km} = 2\,\mathrm{km}$, které ujede rychlostí $v_2 = 10\,\mathrm{km/h}$ za čas

$$t_6 = \frac{d_5}{v_2} = \frac{2\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{5}\,\mathrm{h} = 12\,\mathrm{min},$$

most tedy bude přejíždět v čase 11:45 h + 0:12 h = 11:57 h. **3 body**

c) Panoš Jan ujede za hodinu do místa setkání vzdálenost $d_6 = s - s_1 = 24\,\mathrm{km} - 14{,}5\,\mathrm{km} = 9{,}5\,\mathrm{km}$; jede tedy rychlostí $u = 9{,}5\,\mathrm{km/h}$. **2 body**