Řešení úloh 1. kola 61. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Úlohy navrhli: J. Thomas (1, 2, 3, 4, 5, 7) a P. Šedivý (6)

1.a) Pro objekt hmotnosti m obíhající v blízkosti jádra platí

$$m\frac{v_0^2}{r_j} = G\frac{mM_j}{r_j^2} \quad \Rightarrow \quad M_j = \frac{r_j v_0^2}{G} = 1{,}1\cdot 10^{41}\ \text{kg}.$$

3 body

b) Průměrná hustota galaktického jádra

$$\rho_j = \frac{M_j}{\frac{4}{3}\pi r_j^3} = \frac{3v_0^2}{4\pi G r_j^2} = 1{,}35\cdot 10^{-20}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$ **2 body**

c) Vně galaktického jádra platí

$$\frac{v_0^2}{r} = G\frac{[M_j + M_t(r)]}{r^2}$$

nebo $v_0^2 r = G[M_j + M_t(r)]$. Diferencováním této rovnice

$$v_0^2 dr = Gd[M_t(r)] = G\rho_t(r)\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r,$$

hustota temné hmoty klesá s druhou mocninou vzdálenosti od jádra galaxie

$$\rho_t(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2} = \frac{M_j}{4\pi r_j r^2}.$$

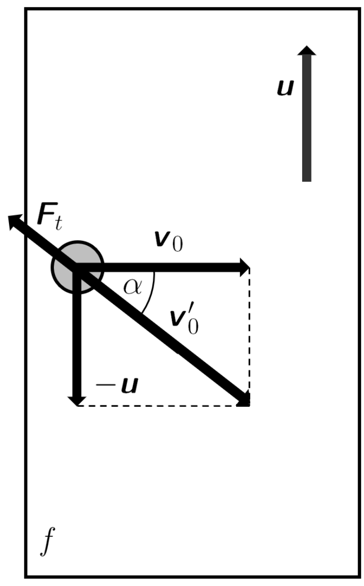
3 body

d) Hmotnost temné hmoty

$$M_t = \frac{v_0^2 r_v}{G} - M_j = \frac{15 r_j v_0^2}{G} - M_j = 14M_j \quad \Rightarrow \quad \frac{M_t}{M_j} = 14.$$

2 body

2.a) Vzhledem k pásu transportéru se kotouč na počátku pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ a současně rychlostí $-\boldsymbol{u}$ (obr. R1).



Obr. R1

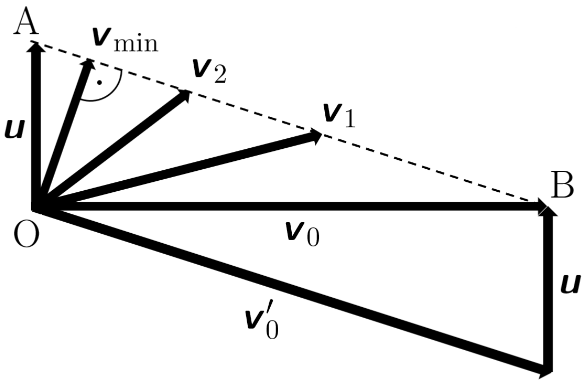
Rychlost v_0' má na počátku velikost $v_0{}' = \sqrt{v_0^2 + u^2}$ a svírá s rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ úhel α, pro který platí $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{u}{v_0}$. **2 body**

b) Síla tření působí proti pohybu kotouče, zrychlení má tedy směr opačný než rychlost v_0', na počátku pohybu svírá s rychlostí $\boldsymbol{u}$ úhel $(90° - \alpha)$ a má stálou velikost $a = fg$. **2 body**

c) Vzhledem k pásu se kotouč pohybuje rovnoměrně zpomaleně s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0'$ a se stálým zrychlením do zastavení. Proto můžeme napsat

$$t = \frac{v_0'}{a} = \frac{\sqrt{v_0^2 + u^2}}{fg}.$$ **2 body**

d) Rychlost kotouče vzhledem k zemi mění jak svoji velikost, tak svůj směr. Rychlost na počátku je $\boldsymbol{v}_0$, od času t pak je to rychlost $\boldsymbol{u}$. Nakreslíme-li všechny okamžité rychlosti do jednoho grafu tak, aby měly počátky v jednom bodě, budou jejich koncové body ležet na úsečce AB; dostaneme tzv. *hodograf rychlostí*:



Obr. R2

Z podobnosti trojúhelníků pak

$$\frac{v_{\min}}{v_0} = \frac{u}{v_0'} \quad \Rightarrow \quad v_{\min} = v_0 \frac{u}{\sqrt{v_0^2 + u^2}}.$$

Se směrem pohybu pásu svírá tato rychlost úhel β, přičemž

$$\sin\beta = \frac{v_{\min}}{v_0} = \frac{u}{\sqrt{v_0^2 + u^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin \frac{u}{\sqrt{v_0^2 + u^2}}.$$ **4 body**

3.a) Hustotu vodní páry můžeme vyjádřit ze stavové rovnice:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Relativní vlhkost vzduchu můžeme vyjádřit pomocí tlaků:

$$\phi = \frac{\Phi}{\Phi_n} = \frac{\dfrac{m}{V}}{\dfrac{m_n}{V}} = \frac{\dfrac{pM}{RT}}{\dfrac{p_n M}{RT}} = \frac{p}{p_n},$$

kde p je tlak vodních par za dané teploty a p_n je tlak sytých vodních par za dané teploty.
Vyjádříme hustotu vodní páry před vznikem mlhy, kdy je relativní vlhkost ϕ, a po jejím vzniku, kdy je relativní vlhkost vzduchu 100 %:

$$\rho_0 = \frac{\phi p_{25} M}{R T_{25}}, \; \rho_1 = \frac{p_{18} M}{R T_{18}}.$$

Hmotnost zkondenzované vody pak bude

$$m = V \Delta\rho = \frac{l^2 h}{4\pi} \frac{M}{R} \left(\frac{\phi p_{25}}{T_{25}} - \frac{p_{18}}{T_{18}} \right),$$

přitom se uvolní teplo

$$Q = m l_v = \frac{l^2 h}{4\pi} \frac{M}{R} \left(\frac{\phi p_{25}}{T_{25}} - \frac{p_{18}}{T_{18}} \right) l_v = 1{,}7 \cdot 10^{14}\ \mathrm{J} = 1{,}7 \cdot 10^{5}\ \mathrm{GJ}.$$

5 bodů

b) Opět vyjádříme hustotu vodní páry ve vzduchu vně budovy, kde je relativní vlhkost ϕ, a uvnitř budovy, kde je relativní vlhkost ϕ_1:

$$\rho_0 = \frac{\phi p_{25} M}{R T_{25}}, \; \rho_2 = \frac{\phi_1 p_{20} M}{R T_{20}}.$$

Hmotnost zkondenzované vody bude

$$m = V \Delta\rho = V \frac{M}{R} \left(\frac{\phi p_{25}}{T_{25}} - \frac{\phi_1 p_{20}}{T_{20}} \right) = 80{,}5\ \mathrm{kg}.$$

2 body

c) Aby nedošlo na krabici s mlékem k vysrážení vodní páry, musela by být relativní vlhkost vzduchu v místnosti při 5 °C nižší než 100 %. Tedy

$$\phi_5 = \frac{p_1}{p_5} \leq 1, \qquad \phi_{20} = \frac{p_2}{p_{20}},$$

kde p_1 je tlak vodní páry při 5 °C a p_2 tlak vodní páry při 20 °C. Přitom

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_{20}}{T_5}.$$

Relativní vlhkost vzduchu v místnosti při 20 °C

$$\phi_{20} = \frac{\phi_5 p_5}{p_{20}} \frac{T_{20}}{T_5}$$

bude maximální při $\phi_5 = 1$, tedy musí být menší, než

$$\phi_{20\,\mathrm{max}} = \frac{p_5}{p_{20}} \frac{T_{20}}{T_5} = 0{,}39 = 39\ \%.$$

3 body

4.a) Rovnice reakce:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \ \rightarrow\ ^{12}_{6}\mathrm{C} + ^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

Energie reakce:

$E_r = \left(m_{^9_4\mathrm{Be}} + m_{^4_2\mathrm{He}} - m_{^{12}_{6}\mathrm{C}} - m_{^1_0\mathrm{n}}\right) c^2 =$

$= (9{,}012\,182 + 4{,}002\,603 - 12{,}000\,000 - 1{,}008\,665\ ) \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \mathrm{J} =$

$= 9{,}14 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 5{,}70\ \mathrm{MeV}.$

Energie reakce je kladná, reakce může probíhat. **3 body**

b) Pro energii pohybující se částice platí

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}.$$

Pak pro vlnovou délku neutronu platí

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 1{,}35.10^{-14}\ \mathrm{m} \ll 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

Vlnová délka je mnohem menší než rozměry atomu, proto nebude docházet k jejich ohybu na krystalové mřížce. **3 body**

c) Rychlost zpomalených neutronů určíme z de Broglieova vztahu:

$$v = \frac{h}{m\lambda} = 3\,960\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Doba průletu neutronu tunelem $t = \dfrac{s}{v} = 0{,}075\,8\ \mathrm{s}$.

Ze zákona radioaktivní přeměny:

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{0{,}076}{11{,}7\cdot 60}} = 0{,}999\,25 = 99{,}925\ \%.$$

Tunelem tedy prolétnou téměř všechny neutrony. **4 body**

5.a) Pro ohniskovou vzdálenost skleněné čočky ve vodě platí:

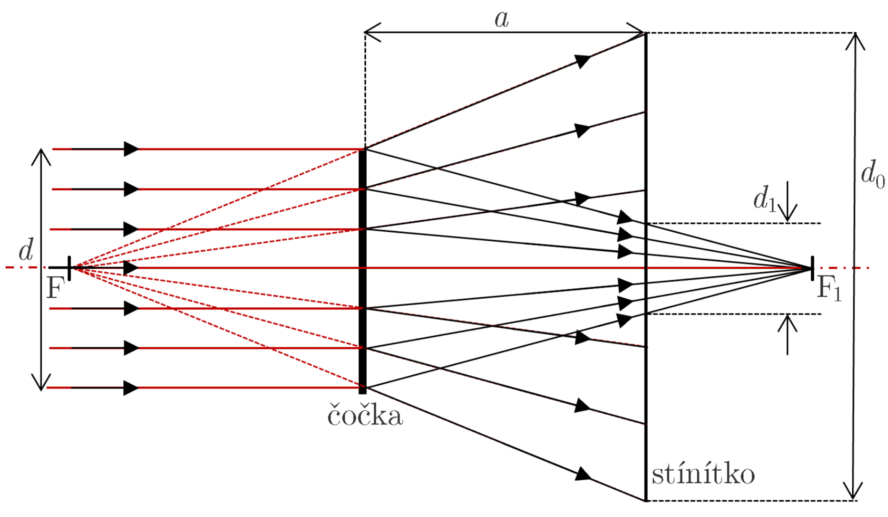
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_0}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Protože je čočka dvojdutá a $\dfrac{n_0}{n_1} > 1$, jde o rozptylku. Bublinky vzduchu ve vodě také tvoří „čočku“ s ohniskovou vzdáleností f_1, pro kterou platí:

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{1}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Protože je čočka dvojdutá a $\dfrac{1}{n_1} < 1$, jde o spojku. Poměr ohniskových vzdáleností těchto čoček

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\dfrac{n_0}{n_1} - 1}{\dfrac{1}{n_1} - 1} = \frac{n_0 - n_1}{1 - n_1}.$$



Obr. R3

Z obrázku $d_0 = 2d$ a ohnisková vzdálenost $f = -a = -40$ cm. Pak

$$f_1 = a\frac{n_0 - n_1}{n_1 - 1}.$$

Hledaný poměr

$$\frac{d_1}{d} = \frac{f_1 - a}{f_1} = \frac{\dfrac{n_0 - n_1}{n_1 - 1} - 1}{\dfrac{n_0 - n_1}{n_1 - 1}} = \frac{n_0 - 2n_1 + 1}{n_0 - n_1} = 0{,}083.$$ **5 bodů**

b) Dopadá-li na čočku světelný tok Φ, pak bublinkami vzduchu projde $\Phi_1 = \varepsilon\Phi$ a skleněnou částí čočky $\Phi_0 = (1-\varepsilon)\Phi$. Osvětlení povrchu stínítka je přímo úměrné světelnému toku Φ a nepřímo úměrné velikosti plochy, na kterou dopadá, tedy osvětlení světlého kruhu

$$E_0 \sim \frac{\Phi_0}{d_0^2} \sim \frac{(1-\varepsilon)\,\Phi}{4d^2}.$$

Osvětlení způsobené paprsky, které prochází bublinkami vzduchu je

$$E_1 \sim \frac{\Phi_1}{d_1^2} \sim \varepsilon\frac{\Phi}{d_1^2} \sim \frac{\varepsilon\Phi}{d^2\left(\dfrac{f_1 - a}{f_1}\right)^2} \sim \frac{\varepsilon\Phi}{d^2}\left(\frac{f_1}{f_1 - a}\right)^2 \sim \frac{\varepsilon\Phi}{d^2}\left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 - 2n_1 + 1}\right)^2.$$

Vztah mezi osvětlením centrální části a zbytku kruhu

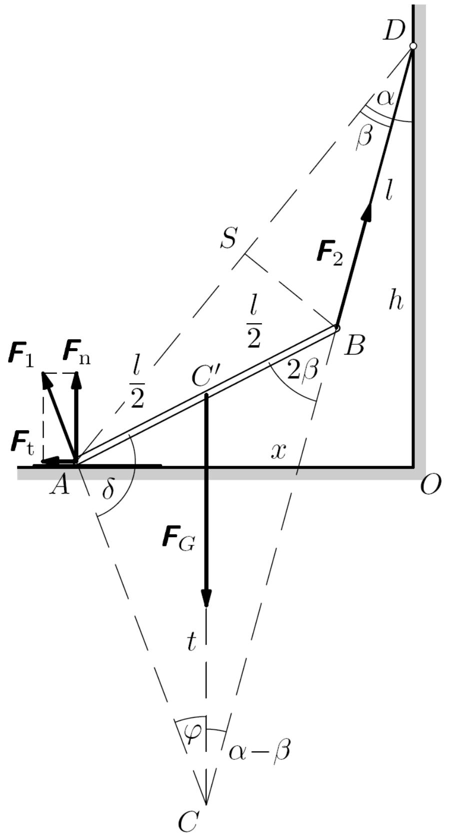
$$k = \frac{E_0 + E_1}{E_0} = 1 + \frac{E_1}{E_0} = 1 + \frac{\varepsilon\left(\dfrac{n_0 - n_1}{n_0 - 2n_1 + 1}\right)^2}{\dfrac{1-\varepsilon}{4}}.$$

Vyjádříme $\varepsilon = \dfrac{k-1}{k - 1 + 4\left(\dfrac{n_0 - n_1}{n_0 - 2n_1 + 1}\right)^2} = 0{,}034.$

Bublinky tedy zaujímají 3,4 % plochy čočky. **5 bodů**

6. Na tyč působí tři síly: tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, tažná síla provázku $\boldsymbol{F}_2$ a reakce podložky 1. Z podmínek rovnováhy plyne, že jejich vektorové přímky se protínají v jediném bodě (obr. R4). V okamžiku, kdy konec tyče začne klouzat po podložce, splňují velikosti vodorovné a svislé složky síly $\boldsymbol{F}_1$ vztah $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$, kde f je součinitel smykového tření mezi tyčí a podložkou, a pro odchylku φ této síly od svislého směru platí

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{n}} = f\,.$$



Obr. R4

Na trojúhelníky ACC', BCC' použijeme sinovou větu. Platí

$$\frac{0{,}5l}{t} = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}\,,$$

$$\delta = 180^\circ - \alpha - \beta - \varphi\,,$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\sin\varphi\cdot\sin 2\beta = \sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta+\varphi) = $$
$$= \sin(\alpha-\beta)\,[\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\varphi + \cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\varphi]\,,$$

$$\sin\varphi\,[\sin 2\beta - \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)] = \cos\varphi\cdot\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)\,,$$

$$f = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta - \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{3\sin 2\beta - \sin 2\alpha}\,.$$

Úhly α a β určíme z pravoúhlých trojúhelníků AOD a ABS:

$$\alpha = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\,, \qquad \beta = \arccos\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{2l}\,.$$

7.a) Z pohybové rovnice ve tvaru $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} = F$ vyplývá, že změna hybnosti je úměrná působící síle. Protože na těleso o hmotnosti m_2 působí stejná síla jako na těleso o hmotnosti m_1, budou změny obou hybností v každém okamžiku stejné, $\Delta p_2 = \Delta p_1$.

Podobně bude platit $\Delta p_3 = -2\,\Delta p_1$. (Poslední vztah vyplývá i ze zákona zachování celkové hybnosti v izolované soustavě tří těles).

S uvážením počátečních rychlostí dostáváme

$$m_2 v_2 = m_1 v_1, \quad m_3 (v_3 - v) = -2 m_1 v_1 \tag{1}$$

a tedy

$$v_1 = \frac{m_3}{2m_1}(v - v_3), \quad v_2 = \frac{m_3}{2m_2}(v - v_3). \tag{2}$$

3 body

b) Abychom mohli rychlosti v_1, v_2 a v_3 jednoznačně určit, je nutné předchozí dvě rovnice, určující vztahy mezi hybnostmi, doplnit další rovnicí.
Tah vlákna závisí na jeho prodloužení. V první fázi se vlákno prodlužuje a tahová síla roste, ve druhé fázi se vlákno zkracuje a tahová síla klesá. Vlákno bude nejvíce napjaté v okamžiku, kdy jeho délka $l(t)$ dosáhne svého maxima, $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = (v_3 - v_1) + (v_3 - v_2) = 0$, tj.

$$v_1 + v_2 = 2v_3. \tag{3}$$

Soustava rovnic (1) a (3) dává řešení

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2m_2 m_3}{4m_1 m_2 + (m_1 + m_2) m_3} v = \frac{12}{17}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \\ v_2 &= \frac{2m_3 m_1}{4m_1 m_2 + (m_1 + m_2) m_3} v = \frac{6}{17}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \\ v_3 &= \frac{(m_1 + m_2) m_3}{4m_1 m_2 + (m_1 + m_2) m_3} v = \frac{9}{17}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \end{aligned} \tag{4}$$

4 body

c) Je-li vlákno dokonale pružné, převede po obnovení své původní délky celou svou energii, spojenou s jeho protažením, zpět na tělesa. Jejich úhrnná kinetická energie pak bude rovna počáteční kinetické energii tělesa o hmotnosti m_3:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_3 v^2. \tag{5}$$

Ze soustavy rovnic (1) a (5) dostaneme

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{4m_2 m_3}{4m_1 m_2 + (m_1 + m_2) m_3} v = \frac{24}{17}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \\ v_2 &= \frac{4m_3 m_1}{4m_1 m_2 + (m_1 + m_2) m_3} v = \frac{12}{17}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \\ v_3 &= \frac{-4m_1 m_2 + (m_1 + m_2) m_3}{4m_1 m_2 + (m_1 + m_2) m_3} v = \frac{1}{17}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \end{aligned} \tag{6}$$

(Druhé řešení $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = v$ odpovídá počátečnímu stavu.) **3 body**

Poznámka k rovnici (3): Za krátký časový úsek dt (ve středoškolském zápisu Δt), během kterého lze rychlosti těles pokládat za neměnné, se kladka posune o vzdálenost $v_3 \mathrm{d}t$ a těleso o hmotnosti m_1 se posune o $v_1 \mathrm{d}t$. Vzdálenost mezi kladkou a prvním tělesem se tak změní o $\mathrm{d}l_1 = v_3 \mathrm{d}t - v_1 \mathrm{d}t$. Podobně vzdálenost mezi kladkou a tělesem o hmotnosti m_2 se změní o $\mathrm{d}l_2 = v_3 dt - v_2 \mathrm{d}t$. Celková délka vlákna se změní o $\mathrm{d}l = \mathrm{d}l_1 + \mathrm{d}l_2 = (2v_3 - v_1 - v_2)\ \mathrm{d}t$, tj. $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2v_3 - v_1 - v_2$. Napjaté vlákno koriguje rychlosti těles tak, že nakonec dospěje do nenapjatého stavu o minimální délce l_0, kterou mělo na počátku. Někde mezi těmito událostmi dosahuje funkce $l(t)$ svého maxima, v němž je její derivace nulová. To vyjadřuje vztah (3).