Řešení úloh krajského kola 61. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autor úloh: J. Thomas

1.a,b) Intenzita elektrického pole mezi deskami kondenzátoru je $E = \frac{U_e}{d}$. Protože se velikost nábojů na deskách nemění, nemění se ani hustota elektrického náboje a pro intenzitu elektrického pole můžeme napsat $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Odtud

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{U_e}{d}.$$

Podle ZZE síla vykoná práci, která je rovna rozdílu energií kondenzátoru. Náboj na deskách kondenzátoru se nemění, jeho kapacita se zmenšila na polovinu:

$$W = Fd = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S^2}{\varepsilon_0 \frac{S}{d}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S d}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U_e}{d}\right)^2 a^2 d.$$

Síla potřebná k posunutí desky nezávisí na vzdálenosti a je

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U_e}{d}\right)^2 a^2.$$

2 body

Tato síla vykoná práci

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d} U_e^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{a^2}{d} U_e^2.$$

2 body

c) Napětí mezi deskami kondenzátoru se v tomto případě nemění. Při posunování desky se mění intenzita el. pole $E = \frac{U_e}{x}$ a velikost síly závisí na vzdálenosti desek:

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U_e}{x}\right)^2 a^2.$$

2 body

Situace je obdobná jako při posunování bodového náboje v poli druhého náboje, kde intenzita el. pole je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti nábojů a potenciál je nepřímo úměrný první mocnině jejich vzdálenosti.

Pro vykonanou práci můžeme napsat:

$$W = \int_d^{2d} F \mathrm{d}x = \int_d^{2d} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U_e}{x}\right)^2 a^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varepsilon_0 U_e^2 a^2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2d}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_0 U_e^2 a^2}{d} = \frac{1}{4} C U_e^2.$$

2 body

ZZE je splněn. Rozdíl energií kondenzátoru na konci posunutí desky a na začátku je

$$\Delta E = \frac{1}{4}CU_e^2 - \frac{1}{2}CU_e^2 = -\frac{1}{4}CU_e^2.$$

Náboj na deskách kondenzátoru se zmenšil o $\Delta Q = \Delta C U_e = \frac{1}{2}CU_e$ a zvýšila se energie zdroje o $\Delta E_z = \Delta Q U_e = \frac{1}{2}CU_e^2$. **2 body**

Alternativní možnost odvození vztahu pro velikost síly v části a):
Mezi deskami kondenzátoru je homogenní elektrické pole. Pro napětí mezi deskami platí: $U = E \cdot d$, pro hustotu elektrického náboje $\sigma = \frac{Q}{S} = \varepsilon_0 E$, odtud

$$E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Energie elektrického pole

$$E_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot V,$$

kde V je objem pole mezi deskami. Objemová hustota energie

$$w = \frac{E_e}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2}.$$

Při posunutí desky o dx síla F vykoná práci:

$$\mathrm{d}W = w\mathrm{d}V = wS\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2} a^2 \mathrm{d}x = F\mathrm{d}x$$

a tedy

$$F = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2} a^2.$$

2. a) V komůrce je $N = \frac{pV}{kT} = \frac{\pi p d^3}{6kT} = 1{,}94 \cdot 10^{22}$ atomů. Střední kvadratickou rychlost určíme následovně:

$$\frac{1}{2}m_0 v_k^2 = \frac{3}{2}kT \quad \Rightarrow \quad v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kT}{A_r m_u}} = 428\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

b) Ionizační energie připadající na jeden atom argonu

$$E_1 = \frac{E_i}{N_A} = \frac{1\,520 \cdot 10^3\ \mathrm{J \cdot mol^{-1}}}{6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}} = 2{,}52 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = 15{,}8\ \mathrm{eV}.$$

2 body

Vlnová délka λ dopadajícího záření musí být menší než

$$\lambda_m = \frac{hc}{E_1} = \frac{hcN_A}{E_i} = 78{,}9\ \mathrm{nm}.$$

2 body

c) Iont argonu získá energii

$$E_{\mathrm{Ar}} = QE\Delta s = \frac{QU\Delta s}{l} = 2{,}0 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{J} = 1{,}25\ \mathrm{meV}.$$

2 body

d) Aby iont argonu získal dostatečnou energii, musí proletět dráhu

$$s = \frac{E_1}{QE} = \frac{E_i l}{QUN_A} = 0{,}63\ \mathrm{mm}.$$

2 body

3. a) Pro ohniskovou vzdálenost tenké symetrické spojky v červeném světle f_{SC} platí:

$$\frac{1}{f_{\mathrm{SC}}} = (n_{\mathrm{LC}} - 1)\,\frac{2}{r_S}. \tag{1}$$

Odtud vyjádříme poloměr křivosti kulových ploch spojky

$$r_s = 2\,(n_{\mathrm{LC}} - 1)\,f_{\mathrm{SC}} = 10{,}3\ \mathrm{cm}.$$

2 body

b) Pro ohniskovou vzdálenost tenké spojky v modrém světle f_{SF} platí

$$\frac{1}{f_{\mathrm{SF}}} = (n_{\mathrm{LF}} - 1)\,\frac{2}{r_S}. \tag{2}$$

Porovnáním vztahů (1) a (2) odvodíme ohniskovou vzdálenost spojky pro modré světlo:

$$\frac{f_{\mathrm{SC}}}{f_{\mathrm{SF}}} = \frac{(n_{\mathrm{LF}} - 1)}{(n_{\mathrm{LC}} - 1)},$$

$$f_{\mathrm{SF}} = f_{\mathrm{SC}}\frac{n_{\mathrm{LC}} - 1}{n_{\mathrm{LF}} - 1}.$$

Protože rozptylka těsně přiléhá ke spojce, je poloměr křivosti její přední plochy až na znaménko shodný s poloměrem křivosti spojky. Pro ohniskovou vzdálenost rozptylky a červené světlo platí

$$\frac{1}{f_{\mathrm{RC}}} = (n_{\mathrm{TC}} - 1)\left(-\frac{1}{r_S} + \frac{1}{r_R}\right)$$

a pro modré světlo

$$\frac{1}{f_{\mathrm{RF}}} = (n_{\mathrm{TF}} - 1)\left(-\frac{1}{r_S} + \frac{1}{r_R}\right).$$

Obdobně jako u spojky odvodíme

$$f_{\mathrm{RF}} = f_{\mathrm{RC}}\frac{n_{\mathrm{TC}} - 1}{n_{\mathrm{TF}} - 1}.$$

Optická mohutnost soustavy pro červené světlo se musí rovnat optické mohutnosti soustavy pro světlo modré:

$$\frac{1}{f_{\mathrm{SC}}}+\frac{1}{f_{\mathrm{RC}}}=\frac{1}{f_{\mathrm{SF}}}+\frac{1}{f_{\mathrm{RF}}}.$$

Po dosazení za ohniskovou vzdálenost rozptylky ve světle červeném

$$f_{\mathrm{RC}}=f_{\mathrm{RF}}\frac{n_{\mathrm{TF}}-1}{n_{\mathrm{TC}}-1}$$

a za ohniskovou vzdálenost spojky ve světle modrém

$$f_{\mathrm{SF}}=f_{\mathrm{SC}}\frac{(n_{\mathrm{LC}}-1)}{n_{\mathrm{LF}}-1}$$

vyjádříme ohniskovou vzdálenost rozptylky v modrém světle:

$$\frac{1}{f_{\mathrm{SC}}}+\frac{1}{f_{\mathrm{RF}}\frac{n_{\mathrm{TF}}-1}{n_{\mathrm{TC}}-1}}=\frac{1}{f_{\mathrm{SC}}\frac{(n_{\mathrm{LC}}-1)}{n_{\mathrm{LF}}-1}}+\frac{1}{f_{\mathrm{RF}}}$$

$$\frac{1}{f_{\mathrm{RF}}}\left(1-\frac{n_{\mathrm{TC}}-1}{n_{\mathrm{TF}}-1}\right)=\frac{1}{f_{\mathrm{SC}}}\left(1-\frac{n_{\mathrm{LF}}-1}{n_{\mathrm{LC}}-1}\right)$$

$$\frac{1}{f_{\mathrm{RF}}}\left(\frac{n_{\mathrm{TF}}-n_{\mathrm{TC}}}{n_{\mathrm{TF}}-1}\right)=\frac{1}{f_{\mathrm{SC}}}\left(\frac{n_{\mathrm{LC}}-n_{\mathrm{LF}}}{n_{\mathrm{LC}}-1}\right)$$

$$f_{\mathrm{RF}}=f_{\mathrm{SC}}\left(\frac{\frac{n_{\mathrm{TF}}-n_{\mathrm{TC}}}{n_{\mathrm{TF}}-1}}{\frac{n_{\mathrm{LC}}-n_{\mathrm{LF}}}{n_{\mathrm{LC}}-1}}\right)=f_{\mathrm{SC}}\frac{(n_{\mathrm{TF}}-n_{\mathrm{TC}})\,(n_{\mathrm{LC}}-1)}{(n_{\mathrm{LC}}-n_{\mathrm{LF}})\,(n_{\mathrm{TF}}-1)}=-24{,}1\ \mathrm{cm}.$$

4 body

c) Ze známé ohniskové vzdálenosti pro modré světlo

$$\frac{1}{f_{\mathrm{RF}}}=(n_{\mathrm{TF}}-1)\left(-\frac{1}{r_S}+\frac{1}{r_R}\right),$$

kde r_S má stejnou velikost jako u spojky, nyní vyjádříme

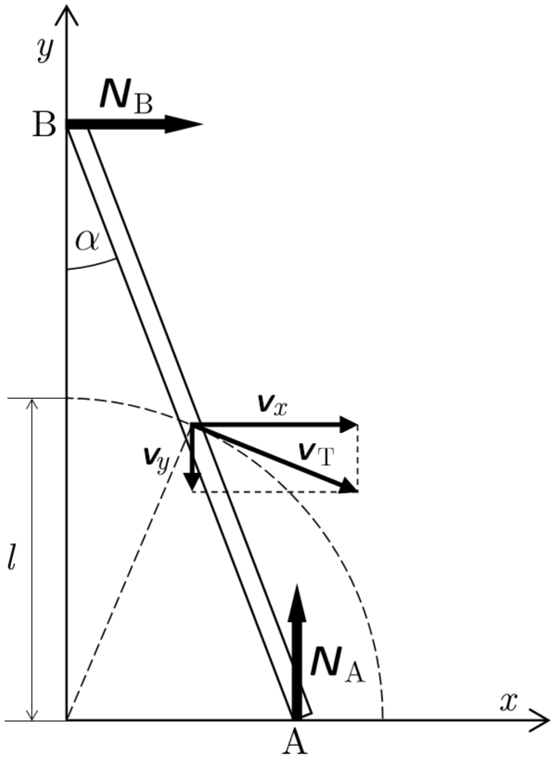
$$\frac{1}{r_R}=\frac{1}{f_{\mathrm{RF}}\,(n_{\mathrm{TF}}-1)}+\frac{1}{r_S}=\frac{r_S+f_{\mathrm{RF}}\,(n_{\mathrm{TF}}-1)}{f_{\mathrm{RF}}\,(n_{\mathrm{TF}}-1)\,r_S},$$

$$r_R=\frac{f_{\mathrm{RF}}\,(n_{\mathrm{TF}}-1)\,r_S}{r_S+f_{\mathrm{RF}}\,(n_{\mathrm{TF}}-1)}=\frac{f_{\mathrm{SC}}\frac{(n_{\mathrm{TF}}-n_{\mathrm{TC}})\,(n_{\mathrm{LC}}-1)}{(n_{\mathrm{LC}}-n_{\mathrm{LF}})\,(n_{\mathrm{TF}}-1)}\,(n_{\mathrm{TF}}-1)\,2\,(n_{\mathrm{LC}}-1)\,f_{\mathrm{SC}}}{2\,(n_{\mathrm{LC}}-1)\,f_{\mathrm{SC}}+f_{\mathrm{SC}}\frac{(n_{\mathrm{TF}}-n_{\mathrm{TC}})\,(n_{\mathrm{LC}}-1)}{(n_{\mathrm{LC}}-n_{\mathrm{LF}})\,(n_{\mathrm{TF}}-1)}\,(n_{\mathrm{TF}}-1)}=$$

$$=\frac{2\,(n_{\mathrm{TF}}-n_{\mathrm{TC}})\,(n_{\mathrm{LC}}-1)\,f_{\mathrm{SC}}}{2\,(n_{\mathrm{LC}}-n_{\mathrm{LF}})+(n_{\mathrm{TF}}-n_{\mathrm{TC}})}=22{,}9\ \mathrm{cm}.$$

4 body

4. a) Těžiště, které je uprostřed tyče, se až do oddálení horního konce tyče od stěny pohybuje po části kružnice o poloměru l (obr. R1).



Obr. R1

Tyč vykonává zároveň pohyb posuvný a otáčivý. Podle zákona zachování energie se potenciální energie tyče mění na kinetickou energii posuvného a otáčivého pohybu:

$$mgl(1-\cos\alpha)=\frac{mv_{\mathrm{T}}^2}{2}+\frac{1}{2}I\omega^2. \tag{1}$$

V tomto vztahu je m hmotnost tyče, $I=\frac{1}{3}\frac{m}{2}l^2+\frac{1}{3}\frac{m}{2}l^2=\frac{1}{3}ml^2$ je moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející těžištěm kolmo k její délce, v_{T} je rychlost jejího těžiště a $\omega=\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ je okamžitá úhlová rychlost jejího otáčení.

2 body

b) Úhel α mezi stěnou a tyčí je roven úhlu mezi stěnou a spojnicí středu kružnice s těžištěm, tudíž

$$v_{\mathrm{T}}=\omega l. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) obdržíme

$$\omega^2=\frac{3g}{2l}(1-\cos\alpha), \tag{3}$$

tj.

$$v_{\mathrm{T}}=\sqrt{\frac{3gl}{2}(1-\cos\alpha)}.$$

2 body

Rychlost $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}$ spodního konce tyče je součtem rychlosti těžiště $\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}=\omega l\,(\cos\alpha,-\sin\alpha)$ a rychlosti rotace $\boldsymbol{v}_{\mathrm{A,\,rot}}=\omega l\;(\cos\alpha,\sin\alpha)$ bodu A kolem těžiště:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{A}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{A,\,rot}}=2\omega l\;(\cos\alpha,0),$$
$$v_{\mathrm{A}}=\cos\alpha\sqrt{6gl\;(1-\cos\alpha)}.$$

Podobně

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{B} = \omega l \ (\cos\alpha, -\sin\alpha) - \omega l \ (\cos\alpha, \sin\alpha) = -2\omega l \ (0, \sin\alpha),$$

$$v_\mathrm{B} = \sin\alpha\sqrt{6gl \ (1-\cos\alpha)}.$$

2 body

c) Tyč se oddělí od stěny v okamžiku, kdy reakce stěny N_B, působící na tyč, bude nulová. Reakci stěny vyjádříme z pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} N_B &= m\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{Tx}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}(\omega l\cos\alpha)}{\mathrm{d}t} = \\ &= ml\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\cos\alpha - \omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{\mathrm{d}t}\right) = ml\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Veličinu $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ v závislosti na úhlu α najdeme nejrychleji z derivace vztahu (3):

$$2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{3g}{2l}\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{3g}{4l}\sin\alpha.$$

Výsledek dosadíme do vztahu (4):

$$N_B = \frac{3mg}{4}\sin\alpha(3\cos\alpha - 2).$$

Tyč se oddělí od stěny v okamžiku splnění podmínky $\cos\alpha_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_0 = 48°$.

2 body

V okamžiku oddělení se spodní konec tyče bude pohybovat rychlostí

$$v_\mathrm{A0} = \cos\alpha_0\sqrt{6gl \ (1-\cos\alpha_0)} = \sqrt{\frac{8}{9}\, gl}.$$

2 body