Řešení úloh celostátního kola 61. ročníku fyzikální olympiády

Úlohy navrhl J. Thomas

1. a) Jednoduchou úvahou zjistíme, že oba kořeny $a_{1,2}$ jsou v intervalu $< 0, L >$, tj. čočka se opravdu bude nacházet mezi zdrojem a stínítkem. Je-li vzdálenost mezi zdrojem a obrazem L a vzdálenost mezi čočkou a zdrojem označíme x, pak podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{L-x}.$$

Rovnici upravíme na kvadratickou rovnici $x^2 - xL + fL = 0$ s kořeny

$$x_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}.$$

Aby na stínítku vznikl ostrý obraz zdroje, musí být splněna podmínka

$$L^2 - 4Lf \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f \leq \frac{L}{4}.$$

3 body

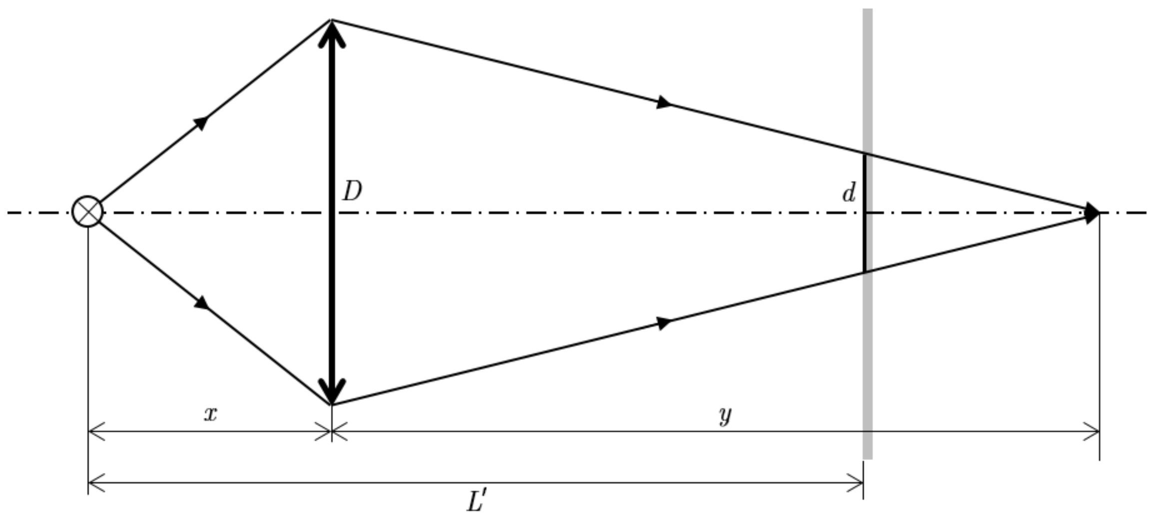
b) Bude-li splněna podmínka $L \geq 4f$, mohou nastat tři případy:

b1) $4f \leq L' < \infty$, pak při daném L' lze obraz zaostřit a při splnění podmínky

$$x_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}$$

vznikne na stínítku ostrý obraz zdroje ($d = 0$).

b2) $f \leq L' < 4f$. Na stínítku vznikne kruh o průměru d (obr. R1).



Obr. R1

Z podobnosti trojúhelníků průměr kruhu

$$d = D\frac{x + y - L'}{y} = D\left(\frac{x - L'}{y} + 1\right). \tag{1}$$

Výraz bude minimální, když bude mít minimum funkce $z = \dfrac{x - L'}{y}$.

Ze zobrazovací rovnice $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ vyjádříme $y = \dfrac{fx}{x - f}$. Po dosazení dostaneme

$$z = \frac{(x - L')(x - f)}{fx} = \frac{1}{f}\left(x + \frac{L'f}{x} - L' - f\right).$$

Najdeme derivaci této funkce a položíme ji rovnou nule:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f}\left(1 - \frac{L'f}{x^2}\right) = 0.$$

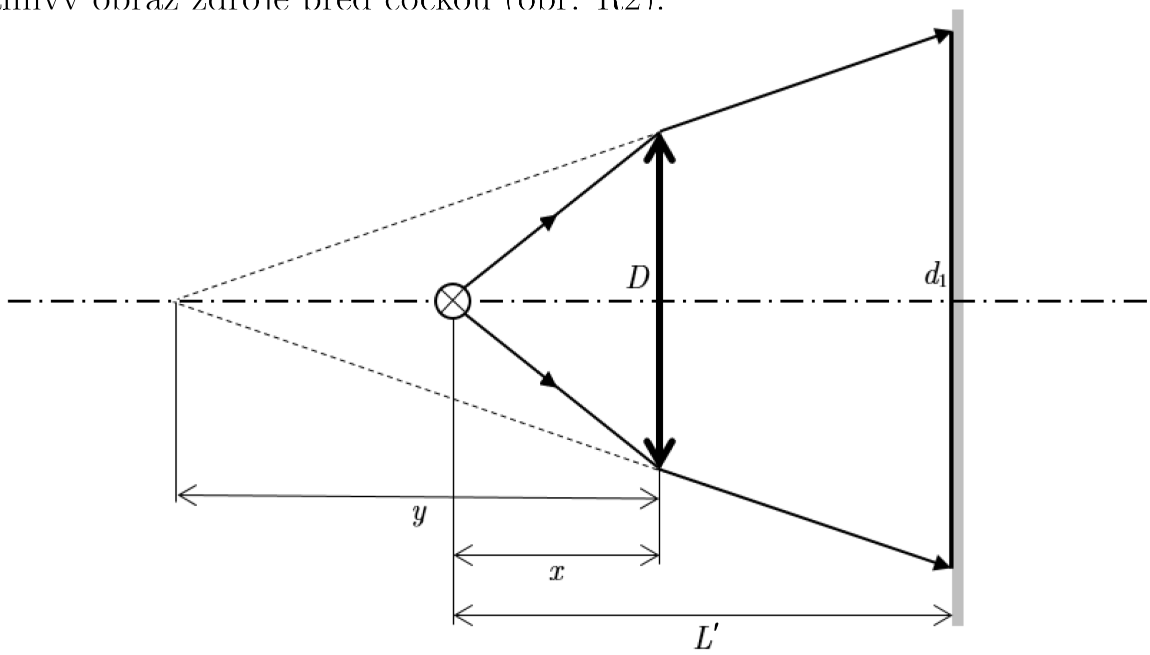
Odtud vidíme, že $x = \sqrt{L'f}$. Druhá derivace je zřejmě kladná, proto jde o minimum.

Dosazením do vztahu (1) dostaneme

$$d = D\left(\frac{x-L'}{y} + 1\right) = D\left[\frac{1}{f}\left(x + \frac{L'f}{x} - L' - f\right) + 1\right] = \frac{D}{f}\left(2\sqrt{L'f} - L'\right).$$

b3) Pro $0 < L' < f$ minimum nastane pro $x = L'$. Čočka se totiž musí nacházet mezi zdrojem a stínítkem, tj. $x \in < 0, L' >$, minimum proto nastane na okraji intervalu nikoli v místě nulové derivace (které se nachází mimo interval). Potom $d = D$. **4 body**

c) Pro $x < f$ bude mít kruh na stínítku průměr $d_1 > D$. V tomto případě leží zdánlivý obraz zdroje před čočkou (obr. R2).



Obr. R2

Z podobnosti trojúhelníků

$$d_1 = D\frac{y + L' - x}{y} = D\left(\frac{L'-x}{y} + 1\right), \tag{2}$$

ze zobrazovací rovnice $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ vyjádříme

$$y = \frac{fx}{f-x}.$$

Dosazením do vztahu (2)

$$d_1 = D\left(\frac{L'-x}{\frac{fx}{f-x}} + 1\right) = D\left[\frac{(L'-x)(f-x)}{fx} + 1\right] = \frac{D}{2}\left(L' + \frac{f}{2}\right).$$

3 body

2. a) V nádobě je přítomno $n = \dfrac{m}{M_m} = 0{,}5$ molu supertěžké vody; počet jader tritia je $6{,}0 \cdot 10^{23}$.

Při rozpadu jednoho atomu se uvolní energie $E_1 = \dfrac{E}{N_A}$, za 1 sekundu se uvolní energie $N_1 E_1$. Označíme-li τ_1 dobu potřebnou k ohřátí vody na teplotu varu, můžeme napsat

$$\eta N_1 E_1 \tau_1 = \eta N_1 \frac{E}{N_A}\tau_1 = nC\Delta t \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{mC\Delta t N_A}{\eta M_m N_1 E} = 20{,}8 \text{ min}\,.$$

3 body

b) Označme potřebnou dobu τ_2. Energie dodaná rozpadem tritia se využije na ohřátí vody na bod varu a k jejímu odpaření:

$$\eta N_1 \frac{E}{N_A}\tau_2 = nC\Delta t + nL_{mv} \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{mN_A(C\Delta t + L_{mv})}{\eta M_m N_1 E} = 7\,840 \text{ s} = 131 \text{ min}\,.$$

3 body

c) Zahřívání páry v uzavřené nádobě bude trvat po dobu $(\tau_3 - \tau_2)$, za tu dobu se uvolní energie $\eta N_1 \dfrac{E}{N_A}(\tau_3 - \tau_2)$, která se spotřebuje na její zahřátí při stálém tlaku. Platí

$$\eta N_1 \frac{E}{N_A}(\tau_3 - \tau_2) = nC_p\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\eta M_m N_1 E(\tau_3 - \tau_2)}{mC_p N_A} = 312\ ^\circ\text{C}.$$

Výsledná teplota vodní páry tedy bude $T = 585$ K. Objem páry určíme ze stavové rovnice:

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{mRT}{M_m p} = 2{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

3 body

d) Náš pokus trval po dobu τ_3. Počet jader, které se rozpadnou za sekundu, tedy aktivita preparátu, bude po této době

$$A = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\tau_3}{T}} = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2{,}5}{12{,}32 \cdot 365 \cdot 24}} = 0{,}999\,984 A_1.$$

Aktivita preparátu se téměř nezmění. **1 bod**

3. a) Ze zákona zachování hybnosti a zákona zachování energie

$$mv = Mu,$$
$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Člen $\frac{mv_0^2}{2}$ je energie dodaná spálenými plyny, která je stejná při výstřelu z upevněné i neupevněné pušky. Zavedením parametru μ dostaneme

$$\mu v = u,$$
$$\mu v^2 + u^2 = \mu v_0^2.$$

Po úpravě, a protože $\mu \to 0$,

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1+\mu}} \approx v_0 \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right). \text{ Pak } \frac{\Delta v}{v_0} = \frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{1}{2}\mu.$$

Úbytek energie náboje je roven kinetické energii, kterou získala puška

$$\Delta E = -\frac{Mu^2}{2}.$$

Relativní změna energie pak

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E - E_0}{E_0} = -\frac{Mu^2}{mv_0^2} = -\frac{\mu v^2}{v_0^2} = -\frac{\mu}{1+\mu}.$$

Při $\mu \to 0$ pak bude $\dfrac{\Delta E}{E_0} = -\dfrac{\mu}{1+\mu} \cdot \dfrac{1-\mu}{1-\mu} \approx -\mu.$ **2 body**

b) *V klasické fyzice* mají zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie tvar

$$Mu = \frac{hf}{c},$$

$$hf_0 = hf + \frac{Mu^2}{2},$$

po úpravě

$$hf_0 = hf + \frac{M}{2}\left(\frac{hf}{Mc}\right)^2.$$

K určení relativního poměru energií $\dfrac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}$ vydělíme Mc^2:

$$\frac{hf_0}{Mc^2} = \frac{hf}{Mc^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{hf}{Mc^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}. \qquad (1)$$

Odtud $\varepsilon = \sqrt{1 + 2\varepsilon_0} - 1$.

Při návratu k obvyklým veličinám $hf = Mc^2\left(\sqrt{1 + 2\dfrac{hf_0}{Mc^2}} - 1\right)$.

Relativisticky budou mít zákony zachování tvar

$$p = \frac{hf}{c},$$

$$hf_0 + Mc^2 = hf + E_j$$

kde E_j a p jsou velikosti energie a hybnosti získané jádrem. Ty jsou navzájem vázány vztahem $E_j^2 = M^2c^4 + p^2c^2$.

Dosazením ze zákonů zachování $\left(hf_0 - hf + Mc^2\right)^2 = \left(Mc^2\right)^2 + (hf)^2$

Po vydělení $\left(Mc^2\right)^2$ dostaneme

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon + 1)^2 = 1 + \varepsilon^2 \qquad (2)$$

Odtud vyplývá $\varepsilon = \dfrac{(\varepsilon_0 + 1)^2 - 1}{2(\varepsilon_0 + 1)}$. Srovnáme klasický a relativistický vztah pro $\varepsilon_0 \to 0$. Pro $\varepsilon_0 \ll 1$ z klasického vztahu (1) plyne

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon^2}{2} \approx -\frac{\varepsilon_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = -\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Pro $\varepsilon_0 \ll 1$ z relativistického vztahu (2) plyne

$$(1-\Delta\varepsilon)^2 = 1+\varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad 1-2\Delta\varepsilon+(\Delta\varepsilon)^2 = 1+\varepsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -2\Delta\varepsilon \approx \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

V prvním přiblížení dostáváme klasicky i relativisticky stejné výsledky. **4 body**

c) Klidová energie jádra iridia

$$E = Mc^2 = 1{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{eV}.$$

Pak parametr $\varepsilon_0 = \frac{129 \cdot 10^3}{1{,}83 \cdot 10^{11}} = 7{,}1 \cdot 10^{-7}$. To je číslo mnohem menší než 1, proto můžeme použít klasické přiblížení:

$$\Delta\varepsilon \approx -\frac{\varepsilon_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{Mu^2}{2}}{Mc^2} = \frac{\varepsilon_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u = c\varepsilon_0 = 2{,}1 \cdot 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Relativní úbytek energie vyletujících fotonů, které opouští pevné jádro a jádro volné je

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx -\frac{\varepsilon_0}{2} = -3{,}5 \cdot 10^{-7}.$$ **2 body**

d) Přibližuje-li se zdroj záření k přijímači rychlostí v_0, je relativní změna frekvence dopadajícího záření $\dfrac{\Delta f}{f_0} \approx \dfrac{v_0}{c}$. Při rezonanci je třeba, aby posuv při zpětném rázu byl kompenzován Dopplerovským posunem. Protože ke změně frekvence dochází při vyzáření i při absorpci fotonu, musí být splněna podmínka

$$\frac{v_0}{c} = 2\frac{\varepsilon_0}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = c\varepsilon_0 = 2{,}1 \cdot 10^2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Touto rychlostí se pohybuje i jádro při zpětném rázu. **2 body**

4. Bod B se pohybuje se zrychlením velikosti a_B a v daném okamžiku se nachází ve vzdálenosti $l\sqrt{2}$ od počáteční polohy. Má tedy rychlost o velikosti

$$v_B = \sqrt{2a_B l\sqrt{2}} = 2^{\frac{3}{4}}\ \sqrt{a_B l},$$ **2 body**

jejíž směr je stejný jako směr zrychlení $\boldsymbol{a}_B$.

Protože jsou ramena kosočtverce pevná, pohybuje se bod A po části kružnice s poloměrem l. Protože ve směru pohybu bodu B urazí bod A vždy poloviční vzdálenost, mají jeho rychlost a zrychlení v tomto směru poloviční velikosti,

$$v_\parallel = \frac{v_B}{2} = 2^{-\frac{1}{4}}\ \sqrt{a_B l},$$

$$a_\parallel = \frac{a_B}{2}.$$

Směr rychlosti bodu A je vždy kolmý ke směru DA. V daném okamžiku tento směr splývá se směrem AB. Jeho celková rychlost v_A má tak velikost

$$v_A = \frac{\frac{v_B}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2^{-\frac{1}{4}}\sqrt{a_B l}}{2^{-\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{4}}\ \sqrt{a_B l}.$$

3 body

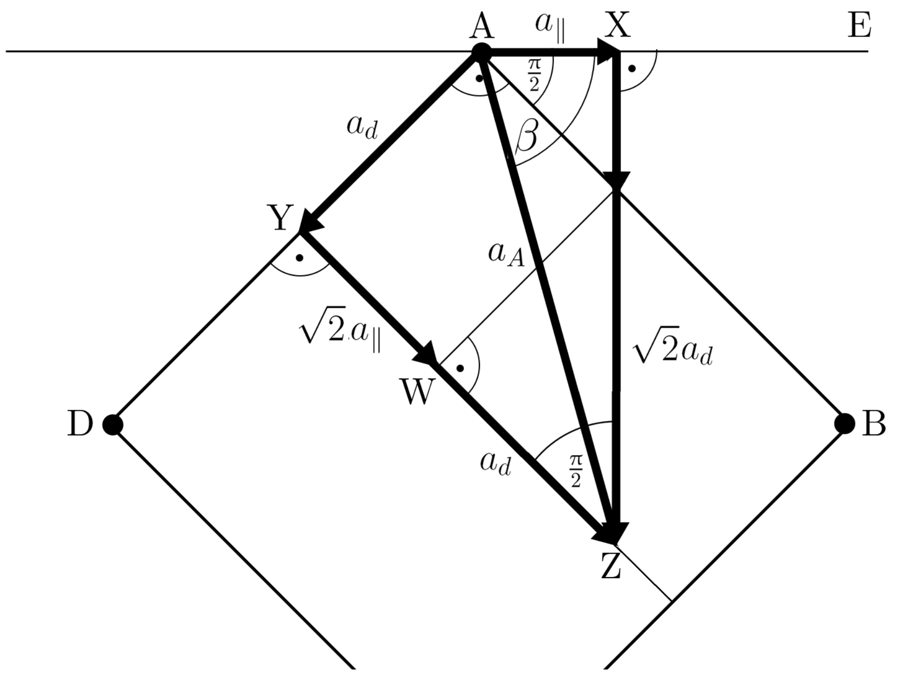
Z velikosti rychlosti v_A určíme okamžitou hodnotu velikosti dostředivého zrychlení

$$a_d = \frac{v_A^2}{l} = a_B\sqrt{2}.$$

Hodnoty $a_\parallel$ a a_d představují průměty hledaného vektoru $\boldsymbol{a}_A$ do směrů AE a AD (obr. R3). Geometricky tento vektor zkonstruujeme tak, že do směrů AE a AD naneseme do vzdáleností $a_\parallel$ a a_d od bodu A body X a Y a v nich vztyčíme kolmice. Jejich průsečík Z udává vektor $\boldsymbol{a}_A = \mathrm{AZ}$.

Velikost úsečky AZ můžeme spočítat z Pythagorovy věty, aplikované na pravoúhlý trojúhelník AXZ nebo AYZ:

$$a_A = |\mathrm{AZ}| = \sqrt{a_\parallel^2 + \left(a_\parallel + \sqrt{2}\ \mathrm{a}_d\right)^2} = \sqrt{a_d^2 + \left(\sqrt{2}\ a_\parallel + a_d\right)^2} = a_B\sqrt{\frac{13}{2}}.$$



Obr. R3

Směr vektoru $\boldsymbol{a}_A$ budeme charakterizovat úhlem β se směrem AE. Určíme jej z trojúhelníku AXZ:

$$\cos\beta = \frac{|\mathrm{AX}|}{|\mathrm{AZ}|} = \frac{a_\parallel}{a_A} = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Po zaokrouhlení $\beta = 79°$. **4 body**

Vektory rychlosti a zrychlení bodu C jsou souměrně sdružené podle osy DB s odpovídajícími vektory rychlosti a zrychlení bodu A. **1 bod**