Řešení úloh krajského kola 61. ročníku FO kategorií BCD

Autoři úloh: I. Volf (1/23DI), M. Chytilová (2/25CI), J. Tesař (3/4BI), M. Rádl (4/24AII)

1. a) Označíme ω_1, ω_2 úhlové rychlosti obou automobilů při jejich pohybech po trajektoriích, které považujeme za kruhové.
V tomto případě platí

$$\omega_1 = \frac{v_0}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{v_0}{r_2}. \tag{1}$$

Čas prvního setkání označíme t_1. V tomto čase urazí první automobil úhlovou dráhu $\varphi_1 = \omega_1 t_1$, druhý automobil $\varphi_2 = \omega_2 t_1$.
K setkání dojde, když $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$, tedy $t_1(\omega_1 + \omega_2) = 2\pi$. Odtud

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}. \tag{2}$$

Místo prvního setkání je určeno úhly φ_1, φ_2. Když do vztahu $\varphi_1 = \omega_1 t_1$ dosadíme za t_1 z (2), dostaneme

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2},$$

a po dosazení z (1)

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad \varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 = 2\pi \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

Tím jsou úhly φ_1, φ_2 vyjádřeny v obloukové míře. Pro zadané hodnoty vyjde $\varphi_1 = 177°$, $\varphi_2 = 183°$.

4 body

Místo druhého setkání je určeno úhly φ_3, φ_4, pro které nyní platí $\varphi_3 + \varphi_4 = 4\pi$. Obdobným způsobem nalezneme hodnoty $\varphi_3 = 2\varphi_1 = 354°$, $\varphi_4 = 2\varphi_2 = 366°$.

2 body

b) Nyní platí vztahy

$$\omega_1 = \frac{v_0}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{v}{r_2}. \tag{3}$$

Označíme t_1 čas prvního setkání, t_3 čas třetího setkání. Potom

$$\omega_1(t_3 - t_1) = 2\pi,$$

$$\omega_2(t_3 - t_1) = 2\pi;$$

odtud $\omega_1 = \omega_2$ a po dosazení z (3)

$$v = v_0 \frac{r_2}{r_1} = 58 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

2 body

c) Pro oba průjezdy z rovnosti časů plyne

$$\frac{2r_1}{v_2} = \frac{\pi r_1}{v_0},$$

odtud

$$v_2 = \frac{2v_0}{\pi} = 38\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

2 body

Poznámka:
Jiný způsob řešení částí a), b):
a) Označme ω_1, ω_2 úhlové rychlosti každého automobilu a t čas jejich setkání. Pak platí:

$$\varphi_1 = \omega_1 t = \frac{v_0}{2\pi r_1} t, \quad \varphi_2 = \omega_2 t = \frac{v_0}{2\pi r_2} t.$$

Z podílu dostaneme

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r_2}{r_1}. \qquad (1*)$$

Od tohoto okamžiku lze za φ_1, φ_2 dosazovat přímo ve stupních, což je požadovaná jednotka. Podmínku setkání pak ještě vyjadřuje rovnice

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 360°. \qquad (2*)$$

Ze soustavy rovnic (1*) a (2*) dostaneme

$$\varphi_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \cdot 360° = 177°,$$

$$\varphi_2 = 360° - \varphi_1 = 183°.$$

Místo prvního opětovného setkání je určeno středovými úhly $\varphi_1 = 177°$ automobilu na vnějším okruhu a $\varphi_2 = 183°$ automobilu na vnitřním okruhu. Do místa příštího setkání opíše každý automobil svůj středový úhel, polohy setkání jsou $\varphi_3 = 2\varphi_1 = 354°$ a $\varphi_4 = 2\varphi_2 = 366°$.
b) Má-li být místo třetího a prvního setkání shodné, opíše každý automobil za stejný čas stejný úhel 360°. Z toho plyne, že jejich úhlové rychlosti se rovnají $\omega_1 = \omega_2$. Dosazením do této rovnosti dostaneme

$$\frac{v_0}{r_1} = \frac{v}{r_2}.$$

Z rovnice plyne

$$v = \frac{r_2}{r_1} v_0 = 58\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

2. a) Působením stálé síly $\boldsymbol{F}$ koná kulička na úseku AB rovnoměrně zrychlený pohyb a dosáhne v bodě B rychlosti $\boldsymbol{v}_\mathrm{B}$. Touto rychlostí se dále pohybuje do bodu C, $\boldsymbol{v}_\mathrm{C} = \boldsymbol{v}_\mathrm{B}$. Z bodu C stoupá kulička po kruhovém oblouku do bodu D, v kterém nabude nulové rychlosti: $\boldsymbol{v}_\mathrm{D} = \boldsymbol{0}$. V tom případě označíme $F = F_\mathrm{min}$. Kinetickou energii v bodě C, popř. D, značíme E_kC, popř. E_kD. Potenciální energii tíhovou označíme E_pC, popř. E_pD, přičemž položíme $E_\mathrm{pC} = 0$ J. Potom

$$E_\mathrm{kC} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{C}^2 = dF_\mathrm{min}, \quad E_\mathrm{pC} = 0\ \mathrm{J}, \quad E_\mathrm{kD} = 0\ \mathrm{J}, \quad E_\mathrm{pD} = mgR(1-\cos\alpha).$$

Podle zákona zachování energie

$$E_\mathrm{kC} + E_\mathrm{pC} = E_\mathrm{kD} + E_\mathrm{pD}, \tag{4}$$

odtud

$$F_\mathrm{min} = \frac{mgR}{d}(1-\cos\alpha) = 2{,}5\ \mathrm{N}.$$

4 body

b) Nyní platí $E_\mathrm{kC} = dF_1$, $E_\mathrm{pC} = 0$ J, $E_\mathrm{kD} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{D}^2$, $E_\mathrm{pD} = mgR(1-\cos\alpha)$. Dosadíme do (4) a dostaneme vztah, z něhož vyjádříme

$$v_\mathrm{D}^2 = 2\left[\frac{dF_1}{m} - gR(1-\cos\alpha)\right],$$

potom

$$v_\mathrm{D} = \sqrt{2\left[\frac{dF_1}{m} - gR(1-\cos\alpha)\right]} = 24\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

Vektor $\boldsymbol{v}_\mathrm{D}$ je kolmý k OD, a svírá tedy s osou souřadnic $+x$ úhel α. Rovnice trajektorie kuličky v soustavě souřadnic Dxy:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - x^2\frac{g}{2v_\mathrm{D}^2\cos^2\alpha}$$

a po dosazení za v_D^2

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - x^2\frac{mg}{4[dF_1 - mgR(1-\cos\alpha)]\cos^2\alpha}.$$

2 body

Označíme $h_0 = R(1-\cos\alpha)$ výšku bodu D nad vodorovnou rovinou procházející bodem C. Maximální výška h kuličky nad touto rovinou je pak $h = h_0 + y_\mathrm{V}$, kde

$$y_\mathrm{V} = \frac{v_\mathrm{D}^2\sin^2\alpha}{2g} = \sin^2\alpha\left[\frac{dF_1}{mg} - R(1-\cos\alpha)\right]$$

je výška vrcholu trajektorie v soustavě souřadnic Dxy. Po úpravě dostaneme

$$h = R(1 - \cos\alpha)\cos^2\alpha + \frac{dF_1}{mg}\sin^2\alpha = 23\ \mathrm{m}.$$

2 body

3. a) Označme Q_1 teplo, které přijme voda, Q_2 teplo, které přijme led a Q_3 teplo, které vydá váleček; výsledná teplota vody je t.
Podle zákona zachování energie je množství tepla Q_3, které předá váleček vodě a ledu, rovno množství tepla, které přijme voda Q_1 a led Q_2 (zanedbáme-li tepelné ztráty vzniklé ohřátím kalorimetru a vyzářením). Proto platí rovnice

$$Q_3 = Q_1 + Q_2. \tag{5}$$

Označíme-li výslednou teplotu t, potom teplo, které vydá váleček při ochlazení, je

$$Q_3 = m_3 c_3 (t_3 - t).$$

Teplo, které spotřebuje voda, aby se ohřála na teplotu t, je

$$Q_1 = c_1 m_1 t,$$

neboť voda, v níž plave led, má teplotu 0 °C. Teplo, které přijme led, se spotřebuje jednak na roztátí ledu (není-li ledu příliš mnoho), jednak na ohřátí vody vzniklé táním ledu z 0 °C na výslednou teplotu t; proto

$$Q_2 = m_2 l + c_1 m_2 t.$$

Dosazením za Q_1, Q_2, Q_3 do rovnice (5) získáme kalorimetrickou rovnici

$$c_3 m_3 (t_3 - t) = m_2 l + c_1 (m_1 + m_2) t,$$

z níž určíme neznámou

$$t = \frac{m_3 c_3 t_3 - m_2 l}{(m_1 + m_2) c_1 + m_3 c_3}. \tag{6}$$

Pro dané hodnoty: $t = \dfrac{0{,}1 \cdot 383 \cdot 50 - 0{,}005 \cdot 330 \cdot 10^3}{(0{,}5 + 0{,}005) \cdot 4\,200 + 0{,}1 \cdot 383}\ {}^\circ\mathrm{C} = 0{,}12\ {}^\circ\mathrm{C}.$

4 body

b) 1. Po ponoření válečku stoupne hladina vody v kalorimetru o objem vody vytlačené válečkem. Objem měděného válečku je

$$V = \frac{m_3}{\varrho_3}. \tag{7}$$

Vytlačená voda zaujme podle nádoby tvar válce, jehož výška je h, takže

$$V = \pi r^2 h. \tag{8}$$

Porovnáním (7) a (8) dostáváme pro h rovnici

$$\frac{m_3}{\varrho_3} = \pi r^2 h;$$

odtud

$$h = \frac{m_3}{\pi r^2 \varrho_3}. \tag{9}$$

Pro dané hodnoty: $h = \dfrac{0,1}{\pi \cdot 0{,}05^2 \cdot 8{,}9 \cdot 10^3}$ m = 0,14 cm.

3 body

2. Označme ϱ_2 hustotu vody, V objem ponořené části ledu a V_2' objem roztátého ledu. Led o hmotnosti m_2 má po roztátí objem

$$V_2' = \frac{m_2}{\varrho_2}.$$

Z Archimédova zákona

$$m_2 g = \varrho_2 V g$$

dostaneme

$$V = \frac{m_2}{\varrho_2}.$$

Z porovnávání plyne $V_2' = V$, tedy úroveň hladiny vody se nezmění.

3 body

4. a) Soustava pružiny s miskou kmitá s periodou

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{10}$$

kde k je tuhost pružiny. Když na misku vložíme závaží o hmotnosti m_1, kmitá soustava s periodou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_1}{k}}. \tag{11}$$

Z (10) a (11) vyjádříme

$$m = m_1 \frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}. \tag{12}$$

2 body

b) Pro zrychlení harmonického pohybu platí

$$|a| = \omega^2 y = \frac{4\pi^2}{T_2^2} y,$$

a tedy

$$y \leq \frac{gT_2^2}{4\pi^2}, \text{ protože } \quad |a| \leq g.$$

Aby závaží nenadskakovalo, musí být $|a| \leq g$, tedy $y \leq \frac{gT_2^2}{4\pi^2}$.

2 body

c) Je-li na misce závaží o hmotnosti m_1, působí na pružinu síla $F_1 = (m+m_1)g$. Se závažím o hmotnosti m_2 na ni působí síla $F_2 = (m+m_2)g$. Velikost rozdílu obou sil

$$\Delta F = |F_2 - F_1| = |m_2 - m_1|g = k\Delta y.$$

Z (12) vyjádříme pomocí (10) s periodami T_1, T_2 uvažovanými v a):

$$k = \frac{4\pi^2 m_1}{T_2^2 - T_1^2},$$

a tedy

$$\Delta y = \frac{|m_2 - m_1|g(T_2^2 - T_1^2)}{4\pi^2 m_1}.$$

3 body

d) Změříme periodu T_1 s prázdnou miskou, periodu T_2 s tělesem známé hmotnosti m_1 a periodu T_x s tělesem neznámé hmotnosti m_x. Platí rovnice

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_1}{k}}, \quad T_\mathrm{x} = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_\mathrm{x}}{k}}.$$

Rovnice umocníme a vytvoříme podíl druhé a první rovnice a podíl třetí a první rovnice:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{m+m_1}{m},$$
$$\frac{T_\mathrm{x}^2}{T_1^2} = \frac{m+m_\mathrm{x}}{m}.$$

Z každé z těchto rovnic vyjádříme hmotnost m:

$$m = m_1\frac{T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}, \quad m = m_\mathrm{x}\frac{T_1^2}{T_\mathrm{x}^2 - T_1^2}.$$

Z rovnosti pravých stran dostaneme

$$m_\mathrm{x} = m_1\frac{T_\mathrm{x}^2 - T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Ke změření hmotnosti tělesa stačí tedy znát hmotnost závaží známé hmotnosti m_1 a doby kmitů misky bez závaží T_1, misky se závažím známé hmotnosti T_2 a misky se závažím neznámé hmotnosti T_x, nemusíme znát ani hmotnost misky, ani tuhost pružiny.

3 body