Řešení úloh 1. kola 61. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1.a) Označme t_1, t_2 časové úseky rovnoměrného a rovnoměrně zpomaleného pohybu a s_1, s_2 odpovídající dráhy. Pak postupně vypočteme:

Doba rovnoměrně zpomaleného pohybu $t_2 = \frac{v}{a} = 15$ s.

Dráha rovnoměrně zpomaleného pohybu $s_2 = \frac{1}{2}at_2^2 = 180$ m.

Dráha rovnoměrného pohybu $s_1 = s - s_2 = 240$ m.

Doba rovnoměrného pohybu $t_1 = \frac{s_1}{v} = 10$ s.

Celková doba jízdy $t = t_1 + t_2 = 25$ s. **3 body**

b) Z rovnic na druhém úseku $s_2 = \frac{1}{2}at_2^2$, $v = at_2$ vyloučením času dostaneme

$$s_2 = \frac{v^2}{2a}.$$

Doba jízdy na prvním úseku je

$$t_1 = \frac{s_1}{v} = \frac{s - s_2}{v} = \frac{s - \frac{v^2}{2a}}{v} = \frac{s}{v} - \frac{v}{2a}.$$

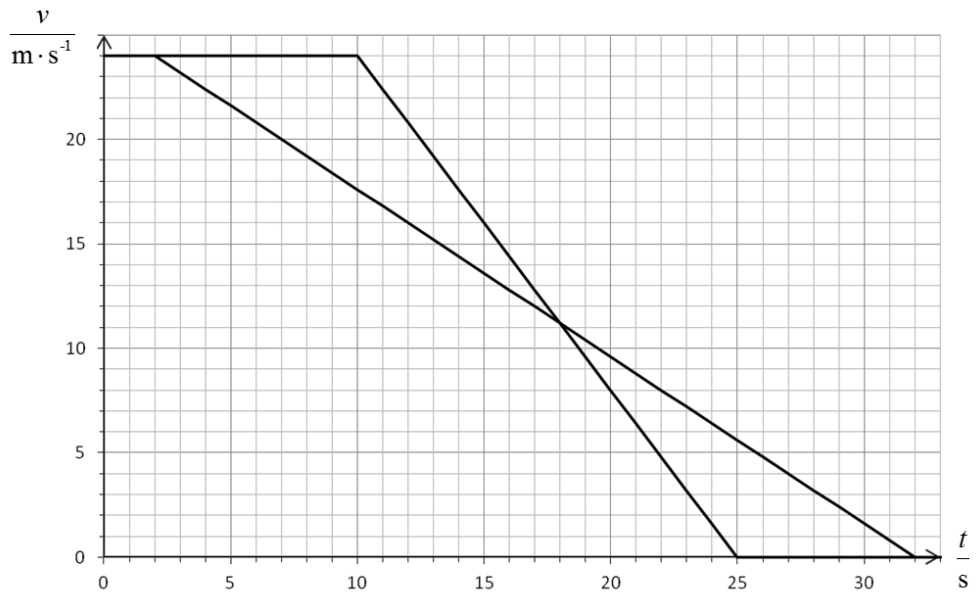
Doba jízdy na druhém úseku je $t_2 = \frac{v}{a}$. Po dosazení dostaneme

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v} - \frac{v}{2a} + \frac{v}{a} = \frac{s}{v} + \frac{v}{2a}.$$

Dosazením číselných hodnot ze zadání opět dostaneme stejný výsledek $t = 25$ s.

3 body

c) K sestrojení prvního grafu známe již všechny údaje, k sestrojení druhého grafu potřebujeme dobu brzdění. Podle rovnice $v = at_2 = \frac{a}{2} \cdot 2t_2$ je při poloviční velikosti zrychlení doba brzdění dvojnásobná, tedy 30 s.



Obr. R1

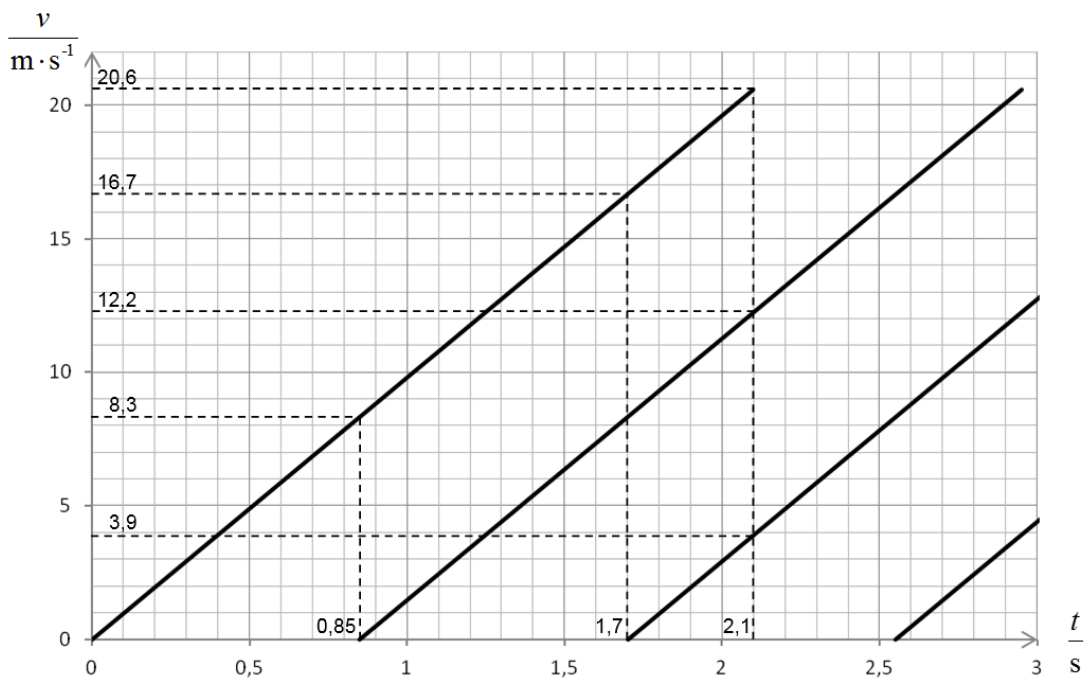
Obsahy ploch pod grafem udávají ujeté dráhy. Z jejich porovnání i bez výpočtu plyne, že v druhé variantě je dráha kratší, tedy automobil zastaví před přejezdem.

Výpočet dráhy v druhé variantě jízdy:

$$s' = \left(24 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 30\right)\ \mathrm{m} = 408\ \mathrm{m} < 420\ \mathrm{m}.$$

4 body

2.a) K sestrojení grafu potřebujeme ještě dva údaje: Velikost rychlosti dopadu každé kapky $v = gt = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 2{,}1\ \mathrm{s} = 20{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a dobu mezi uvolněním dvou sousedních kapek $\Delta t = \dfrac{3{,}4\ \mathrm{s}}{4} = 0{,}85\ \mathrm{s}$.



Obr. R2

6 bodů

b) Vzdálenosti kapek určíme jako obsah plochy pod grafem. Vzdálenost je minimální v okamžiku uvolnění další kapky a je určena obsahem příslušného trojúhelníku:

$$d_{2\,\mathrm{min}} = \frac{1}{2} \cdot 8{,}3\ \mathrm{m \cdot\ s^{-1}} \cdot 0{,}85\ \mathrm{s} = 3{,}5\ \mathrm{m},$$

$$d_{3\,\mathrm{min}} = \frac{1}{2} \cdot 16{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 1{,}7\ \mathrm{s} = 14\ \mathrm{m}.$$

Vzdálenost je maximální v okamžiku dopadu první kapky a je určena rozdílem obsahů příslušných trojúhelníků:

$$d_{2\,\mathrm{max}} = \frac{1}{2} \cdot 20{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 2{,}1\ \mathrm{s} - \frac{1}{2} \cdot 12{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot (2{,}1 - 0{,}85)\ \mathrm{s} = 14\ \mathrm{m},$$

$$d_{3\,\mathrm{max}} = \frac{1}{2} \cdot 20{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 2{,}1\ \mathrm{s} - \frac{1}{2} \cdot 3{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot (2{,}1 - 1{,}7)\ \mathrm{s} = 21\ \mathrm{m}.$$

4 body

3.a) Kuličky dosáhnou maximální rychlosti při otočení soustavy o úhel 180°, kdy hmotnější kulička prochází nejnižší polohou. Porovnáme mechanickou energii soustavy v počáteční poloze a v poloze po otočení. Tedy ze zákona zachování mechanické energie

$$2mg \cdot 2r = mg \cdot 2r + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_{\mathrm{m}}^2 + \frac{1}{2} m v_{\mathrm{m}}^2$$

plyne $v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{4}{3} gr}$. **3 body**

Z předchozí rovnice dostaneme $r = \frac{3v_{\mathrm{m}}^2}{4g}$. Délka tyčky je $l = 2r = \frac{3v_{\mathrm{m}}^2}{2g} = 0{,}96$ m.

2 body

b) Otočením soustavy o 180° horní kulička sníží svoji polohu o $4r$ a dosáhne obvodové rychlosti v_1, dolní kulička zvýší svoji polohu o $2r$ a dosáhne obvodové rychlosti v_2. V těchto polohách opět porovnáme mechanickou energii soustavy . Ze zákona zachování mechanické energie

$$mg \cdot 4r = mg \cdot 2r + \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$$

dostaneme $8gr = 4gr + v_1^2 + v_2^2$, kde $v_1 = 2r\omega_{\mathrm{m}}$, $v_2 = r\omega_{\mathrm{m}}$. Po dosazení vyjádříme hledanou úhlovou rychlost

$$\omega_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{4g}{5r}}.$$

3 body

Z předchozí rovnice dostaneme $r = \frac{4g}{5\omega_{\mathrm{m}}^2}$. Délka tyčky je $l' = 3r = \frac{12g}{5\omega_{\mathrm{m}}^2} =$ $= 0{,}42$ m.

2 body

4.a) V první fázi je pohyb celé soustavy rovnoměrně zrychlený a platí

$$h = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \tag{1}$$

$$v_{\mathrm{m}} = a_1 t_1.$$

Z rovnic plyne

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{2h}{t_1} = 1{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \tag{2}$$

V druhé fázi se kvádr pohybuje rovnoměrně zpomaleně a pro jeho pohyb platí

$$v_{\mathrm{m}} = a_2 t_2, \tag{3}$$

$$m_2 a_2 = f m_2 g.$$

Z rovnic plyne $f = \frac{a_2}{g} = \frac{v_{\mathrm{m}}}{g t_2}$. Užitím (2) dostaneme

$$f = \frac{2h}{g t_1 t_2} = 0{,}20.$$

4 body

b) Z rovnice (1) přímo plyne $a_1 = \dfrac{2h}{t_1^2} = 2{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Z rovnic (3) a (2) plyne:

$$a_2 = \frac{v_m}{t_2} = \frac{2h}{t_1 t_2} = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

c) Z pohybové rovnice pro první fázi pohybu $m_1 g = (m_1 + m_2)\, a_1 + f m_2 g$ postupně plyne

$$m_1\,(g - a_1) = m_2\,(a_1 + fg)\,,$$

$$m_2 = \frac{g - a_1}{a_1 + fg} m_1 = \frac{g - \dfrac{2h}{t_1^2}}{\dfrac{2h}{t_1^2} + \dfrac{2h}{g t_1 t_2} g} m_1 = \frac{g t_1^2 t_2 - 2h t_2}{2h t_2 + 2h t_1} m_1 = \frac{g t_1^2 - 2h}{2h} \frac{t_2}{t_1 + t_2} m_1 =$$

$$= \left(\frac{g t_1^2}{2h} - 1\right) \frac{t_2}{t_1 + t_2} m_1 = 1{,}46 m_1 = 730\ \mathrm{g}.$$

4 body

5.a) Pro výkon potřebný k vyjetí vlaku do výšky h v jednotlivých případech platí

$$P = \frac{(m_0 + 3m_1) g h}{t_1} = \frac{(m_0 + N m_1) g h}{t_2}.$$

Z rovnosti zlomků plyne rovnice

$$(m_0 + 3m_1) t_2 = (m_0 + N m_1) t_1,$$

z níž vyjádříme počet vagónů

$$N = \frac{m_0\,(t_2 - t_1) + 3 m_1 t_2}{m_1 t_1} = 6.$$

3 body

b) Označme M hmotnost lokomotivy a soupravy vagónů. Při rovnoměrném pohybu rychlostí $v = \dfrac{d}{t}$ musí kola lokomotivy vyvinout v tečném směru na kolejnice tahovou sílu, jejíž velikost je součtem velikostí tečné složky tíhové síly a síly valivého odporu

$$P = Fv = (Mg \sin\alpha + 0{,}002 Mg) \cdot \frac{d}{t} = (0{,}024 Mg + 0{,}002 Mg) \cdot \frac{d}{t} = 0{,}026 Mg \frac{d}{t}.$$

Např. pro první vlak dostaneme

$$P = 0{,}026\,(m_0 + 3m_1)\, g \frac{d}{t_1} = 970\ \mathrm{kW}.$$

3 body

c) Tentokrát je tečná složka tíhové síly urychlující silou, síla valivého odporu má opačný směr a opět působí proti pohybu. Proto velikost zrychlení je

$$a = \frac{m_1 g \sin\alpha - 0{,}002 m_1 g}{m_1} = 0{,}024 g - 0{,}002 g = 0{,}022 g.$$

Z rovnice $d = \frac{1}{2}at_0^2$ dostaneme

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{0{,}022g}} = 190\ \mathrm{s}.$$

Velikost konečné rychlosti je

$$v = at_0 = a\sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{2ad} = \sqrt{0{,}044gd} = 42\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 150\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

4 body

6. Příklady naměřených hodnot:

Druh mincí: (50+10) Kč a 10 Kč

$m_1 = 17{,}32$ g $\quad m_2 = 7{,}62$ g

Číslo měření	$\frac{x_1}{\mathrm{mm}}$	$\frac{x_2}{\mathrm{mm}}$	k
1	26	71	0,38
2	51	153	0,42
3	51	130	0,35
4	49	133	0,38
5	30	71	0,32
6	26	68	0,36
7	52	138	0,37
8	67	170	0,35
9	54	156	0,40
10	60	150	0,34

Druh mincí: (5+1) Kč a 1 Kč

$m_1 = 8{,}40$ g $\quad m_2 = 3{,}60$ g

Číslo měření	$\frac{x_1}{\mathrm{mm}}$	$\frac{x_2}{\mathrm{mm}}$	k
1	28	110	0,53
2	29	119	0,55
3	23	95	0,55
4	30	116	0,52
5	24	103	0,57
6	34	137	0,54
7	35	141	0,54
8	37	164	0,58
9	33	128	0,53
10	26	100	0,52

Závěr: Mince nominálních hodnot 10 Kč a 50 Kč vykazují menší odrazivost než mince nominálních hodnot 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč. Změřený koeficient restituce v prvním případě je $k_{10,50} = 0{,}37 \pm 0{,}02$ s relativní odchylkou 5 %, v druhém případě $k_{1,2,5} = 0{,}54 \pm 0{,}02$ s relativní odchylkou 4 %.

7. Zvolme osu x orientovanou zleva doprava a směr pohybu prvního vozíku ve směru osy x. Označme dané souřadnice rychlostí prvního a druhého vozíku před srážkou v, $-v$, hledané souřadnice po srážce u_1, u_2.

a) Během srážky jsou splněny zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie:

$$m_1 v + m_2(-v) = m_1 u_1 + m_2 u_2, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2.$$

Rovnice upravíme

$$m_1(v - u_1) = m_2(u_2 + v),$$

$$m_1\left(v^2 - u_1^2\right) = m_2\left(u_2^2 - v^2\right).$$

a z každé vyjádříme poměr hmotností

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{u_2 + v}{v - u_1} = \frac{u_2^2 - v^2}{v^2 - u_1^2}.$$

Z druhého a třetího členu plyne $\dfrac{u_2 - v}{v + u_1} = 1$ neboli $u_2 = u_1 + 2v$. Užitím rovnice (1) dostaneme

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u_2} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}. \tag{3}$$

4 body

b) Dosazením podmínky $m_2 = 4m_1$ do (2) a (3) dostaneme

$$u_1 = \frac{m_1 - 3 \cdot 4m_1}{m_1 + 4m_1}v = -\frac{11}{5}v,$$
$$u_2 = \frac{3m_1 - 4m_1}{m_1 + 4m_1}v = -\frac{1}{5}v.$$

Oba vozíky pojedou proti směru osy x, tj. v původním směru pohybu hmotnějšího vozíku. **2 body**

c) Dosazením podmínky $m_2 = m_1$ do (2) a (3) dostaneme

$$u_1 = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + m_1}v = -v,$$
$$u_2 = \frac{3m_1 - m_1}{m_1 + m_1}v = v.$$

Každý z vozíků změní svoji rychlost na opačnou, velikosti rychlostí se nezmění.

2 body

d) Úloha je symetrická z hlediska volby vozíku, který má zastavit. Zastaví-li např. první vozík, z podmínky $u_1 = 0$ v rovnici (2) plyne

$$m_1 = 3m_2,$$

tj. první vozík musí mít trojnásobnou hmotnost. Dosazením této podmínky do rovnice (3) dostaneme

$$u_2 = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v = \frac{9m_2 - m_2}{3m_2 + m_2}v = 2v.$$

Druhý vozík srážkou změnil směr pohybu na opačný a pohyboval se dvakrát rychleji. **2 body**