Řešení úloh okresního kola 61. ročníku Fyzikální olympiády

ve školním roce 2019/2020

Kategorie E

Autoři úloh: J. Jírů (4), J. Thomas (1–3)

FO61E2–1: Dvě auta

a) Průměrná rychlost v_p obou automobilů je stejná. Označme t_1 čas, za který první automobil ujede první polovinu trasy $s/2$, t_2 čas, za který ujede druhou polovinu trasy $s/2$. Poloviční rychlostí ujede první polovinu trasy za dvojnásobnou dobu než druhou polovinu ($t_1 = 2t_2$), celkovou dobu jízdy $t = 120\,\mathrm{minut} = 2\,\mathrm{h}$ tak musíme rozdělit v poměru 2:1; získáme $t_1 = 80\,\mathrm{min} = \frac{4}{3}\,\mathrm{h}$, $t_2 = 40\,\mathrm{min} = \frac{2}{3}\,\mathrm{h}$ (pro první automobil, pro druhý je poměr přesně obrácený). Vzdálenost mezi oběma místy pak vychází

$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2 = 30\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{4}{3}\,\mathrm{h} + 60\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{2}{3}\,\mathrm{h} = 80\,\mathrm{km}.$$

3 body

Pro průměrnou rychlost pak dostáváme

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{80\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 40\,\mathrm{km/h}.$$

2 body

Poznámka: Lze uznat např. i postup, kdy soutěžící bude zkoušet najít (třeba číselným dosazením) takovou délku trasy s, aby

$$t_1 + t_2 = \frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2} = s\frac{v_1 + v_2}{2v_1 v_2} = \frac{s}{40\,\mathrm{km/h}} = t = 120\,\mathrm{min} = 2\,\mathrm{h}.$$

Obecně je možné spočítat i průměrnou rychlost

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\dfrac{s}{2v_1} + \dfrac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 30\,\mathrm{km/h} \cdot 60\,\mathrm{km/h}}{30\,\mathrm{km/h} + 60\,\mathrm{km/h}} = 40\,\mathrm{km/h}$$

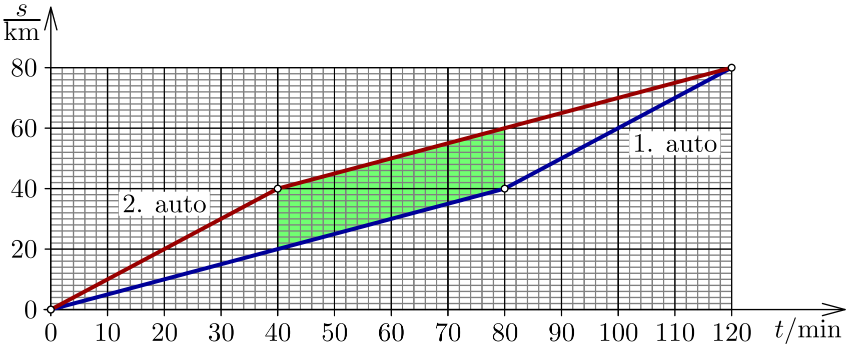
a pomocí ní vzdálenost míst A a B

$$s = v_\mathrm{p} t = 40\,\mathrm{km/h} \cdot 2\,\mathrm{h} = 80\,\mathrm{km}.$$

b) Z grafu na obr. 1 odečteme, že největší vzdálenost mezi automobily bude $s_\mathrm{max} = 20\,\mathrm{km}$. V této vzdálenosti se automobily nachází po dobu $t' = 40\,\mathrm{minut}$ (mezi 40. a 80. minutou jízdy; v grafu je oblast vyznačena zeleným rovnoběžníkem).

5 bodů

Poznámka: Při záměně os by graf neměl být uznán jako úplně správný, v takovém případě doporučujeme snížit hodnocení o 1 bod.



Obr. 1: Graf závislosti dráhy na čase $s = s(t)$

FO61E2–2: Kelímek s čokoládou

a) Podle Archimédova zákona platí při prvním ponoření kelímku do horké vody

$$mg + \frac{1}{2}m_1 g = \frac{3}{4}V\varrho g = 0{,}75V\varrho g$$

a při jeho druhém ponoření

$$mg + \frac{1}{4}m_1 g = \frac{2}{5}V\varrho g = 0{,}40V\varrho g$$

Odečtením rovnic dostaneme

$$\frac{1}{4}m_1 g = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right)V\varrho g = \frac{7}{20}V\varrho g = 0{,}35V\varrho g.$$

Odtud získáme

$$m_1 = 4 \cdot \frac{7}{20}V\varrho = \frac{28}{20}V\varrho = \frac{28}{20} \cdot 300\,\mathrm{cm}^3 \cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 = 420\,\mathrm{g}.$$ **3 body**

b) Hmotnost prázdného kelímku pak vychází

$$m = \frac{3}{4}V\varrho - \frac{1}{2}m_1 = \frac{3}{4}V\varrho - \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{20}V\varrho = \frac{1}{20}V\varrho = \frac{1}{20} \cdot 300\,\mathrm{cm}^3 \cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 = 15\,\mathrm{g}.$$

3 body

c) Hustota čokolády bude

$$\varrho = \frac{m_1}{V} = \frac{420\,\mathrm{g}}{300\,\mathrm{cm}^3} = 1{,}4\,\mathrm{g/cm}^3.$$ **2 body**

d) Označme m_2 největší hledanou hmotnost čokolády v kelímku. Nyní platí

$$mg + m_2 g = V\varrho g$$

a odtud dostáváme

$$m_2 = V\varrho - m = V\varrho - \frac{1}{20}V\varrho = \frac{19}{20}V\varrho = 0{,}95 \cdot 300\,\mathrm{cm}^3 \cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 = 285\,\mathrm{g} \doteq 280\,\mathrm{g}.$$

2 body

V tomto případě má smysl zaokrouhlovat dolů, jinak by se kelímek s čokoládou potopil.

FO61E2–3: Kapající bojler

a) Hmotnost kapky vody vychází

$$m_1 = \varrho V_1 = 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot \frac{20\,\mathrm{ml}}{50} = 1\,\mathrm{g/cm^3} \cdot \frac{20\,\mathrm{cm^3}}{50} = 0{,}40\,\mathrm{g}.$$

2 body

b) Za 10 minut (tj. $\frac{1}{6}$ hodiny) nakape podle zadání objem 34 ml, za hodinu $6 \cdot 34\,\mathrm{ml} = 204\,\mathrm{ml} = 0{,}204\,\mathrm{l}$, za 1 den $24 \cdot 204\,\mathrm{ml} = 4\,896\,\mathrm{ml}$. Objem $V = 24\,\mathrm{l}$ pak nakape za dobu

$$T = \frac{24\,\mathrm{l}}{0{,}204\,\mathrm{l/h}} \doteq 117{,}65\,\mathrm{h} \doteq 4{,}902\,0\,\mathrm{dne} \doteq 4\,\mathrm{dny}\,22\,\mathrm{h}.$$

Voda začala odkapávat asi $5\,\mathrm{dnů} - 4{,}902\,0\,\mathrm{dne} = 0{,}098\,039\,\mathrm{dne} \doteq 2{,}4\,\mathrm{h}$ po Otově odjezdu.

2 body

Platba za vodné a stočné bude $0{,}024\,\mathrm{m^3} \cdot 94\,\mathrm{Kč/m^3} \doteq 2{,}256\,0\,\mathrm{Kč} \doteq 2\,\mathrm{Kč}$. **1 bod**

c) Energie spotřebovaná na zahřívání vody je rovna dodanému teplu

$$\begin{aligned} E = Q = mc\Delta t = V\varrho c\,(t_2 - t_1) &= \\ = 0{,}024\,\mathrm{m^3} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (60\,^\circ\mathrm{C} - 10\,^\circ\mathrm{C}) &= \\ = 5{,}04\,\mathrm{MJ} \doteq 5{,}0\,\mathrm{MJ}. \end{aligned}$$

2 body

Protože účinnost zahřívání je jen 60 %, bude spotřeba vyšší, a to

$$E_1 = \frac{E}{\eta} = \frac{5{,}04\,\mathrm{MJ}}{0{,}60} = 8{,}4\,\mathrm{MJ} = \frac{8{,}4\,\mathrm{MJ}}{3{,}6\,\mathrm{MJ/kWh}} = 2{,}333\,3\,\mathrm{kWh} \doteq 2{,}3\,\mathrm{kWh}.$$

2 body

Cena za spotřebovanou energii pak bude

$$2{,}333\,3\,\mathrm{kWh} \cdot 4{,}34\,\mathrm{Kč/kWh} \doteq 10{,}127\,\mathrm{Kč} \doteq 10\,\mathrm{Kč}.$$

1 bod

FO61E2–4: Žárovky a zdroje napětí

a) Odpor jedné žárovky vychází

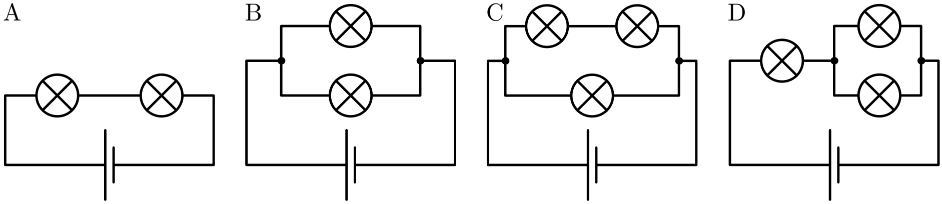
$$R = \frac{U}{I} = \frac{6\,\mathrm{V}}{0{,}150\,\mathrm{A}} = 40\,\Omega$$

a její příkon $$P = UI = 6\,\mathrm{V} \cdot 0{,}150\,\mathrm{A} = 0{,}90\,\mathrm{W}.$$ **2 body**

b) Při použití zdroje o napětí $U_1 = 3\,\mathrm{V}$ bude žárovka svítit málo, při postupném použití zdrojů $U_3 = 9\,\mathrm{V}$ a $U_4 = 12\,\mathrm{V}$ bude žárovka přetížena a bude svítit velmi jasně. **1 bod**

Poznámka: Doporučujeme uznat i odpověď, že při připojení k vyššímu napětí se žárovka přepálí, i když se to stát nemusí; některé žárovky s provozním napětím okolo 6 V „vydrží" po nějakou dobu i napětí přes 12 V.

c) Podmínku lze splnit jen při zapojení A a B.

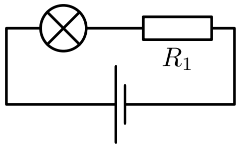


12 V   6 V   nelze   nelze

4 body

Poznámka: Zadání nepožaduje zdůvodnění a pokud chybí, není nutné kvůli tomu strhávat body, ve stručnosti může být např. následující. V případě sériového zapojení A se napětí zdroje $U_4 = 12\,\mathrm{V}$ díky stejnému odporu žárovek rozdělí na dvě stejně velká napětí 6 V. U paralelního zapojení B bude na obou žárovkách stejné napětí, zdroj by mě mít proto napětí 6 V. U zapojení C nelze docílit, aby na každé žárovce bylo napětí 6 V – pokud zvolíme zdroj o napětí $U_2 = 6\,\mathrm{V}$, bude na každé z žárovek v horní větvi poloviční napětí 3 V, pokud zvolíme zdroj o napětí $U_4 = 12\,\mathrm{V}$, bude toto napětí na žárovce ve spodní větvi. V případě D pak nemůže být stejné napětí na žárovce v nerozvětvené části obvodu a na žárovkách v rozvětvené části – výsledný odpor dvou paralelně zapojených žárovek bude vždy menší (poloviční) než jedné žárovky.

d) Aby na žárovce nebylo celé napětí $U_3 = 9\,\mathrm{V}$, je nutné rezistor připojit k žárovce sériově (možné zapojení je na obrázku, na pořadí žárovky a rezistoru nezáleží). Žárovkou musí protékat předepsaný proud $I = 0{,}15\,\mathrm{A}$. Podle Ohmova zákona pak bude celkový odpor zapojení



$$R_\mathrm{c} = \frac{U_3}{I} = \frac{9\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}} = 60\,\Omega.$$

Odpor rezistoru musí být

$$R_1 = R_\mathrm{c} - R = 60\,\Omega - 40\,\Omega = 20\,\Omega.$$

3 body

Poznámka: Hodnotu odporu lze určit i z úvahy, že na žárovce má být napětí $U = 6\,\mathrm{V}$, na rezistoru pak $U_3 - U = 9\,\mathrm{V} - 6\,\mathrm{V} = 3\,\mathrm{V} = U_1$, při sériovém zapojení oběma součástkami prochází proud $I = 0{,}15\,\mathrm{A}$. Odpor R_1 pak získáme podělením

$$R_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{3\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}} = 20\,\Omega.$$

Úlohy připravila komise pro výběr úloh při ÚKFO České republiky ve složení Dagmar Kaštilová, Věra Koudelková, Miroslava Maňásková, Lenka Podzimková, Richard Polma, Jindřich Pulíček a Lukáš Richterek ve spolupráci s autory úloh Josefem Jírů a Janem Thomasem.