Řešení úloh školního kola 61. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2019/2020

Kategorie E a F

Autoři úloh: M. Chytilová (5), Ľ. Kondrád (12, FO SR), L. Richterek (1, 2, 8), J. Thomas (3–4, 6–7), časopis Потенциал (9), Всероссийская олимпиада по физике 2010 (11) a 2017 (10)

FO61EF1–1: Víkend na trati

a) Jízda ve směru z Dolní Lipky do Hanušovic trvá dobu $t_1 = 7{:}58 - 7{:}29 = 29\,\mathrm{min}$, jízda opačným směrem $t_2 = 8{:}40 - 8{:}09 = 31\,\mathrm{min}$, tedy o 2 min déle, vyšší průměrnou rychlost má vlak ve směru do Hanušovic. Jak zjistíme např. na stránce `https://www.zelpage.cz/trate/ceska-republika/trat-025`, nadmořská výška stanice Dolní Lipka je 545 m, stanice Hanušovice 395 m. Nejvyšší nadmořskou výšku na trati má stanice Červený potok, konkrétně 605 m. Ve směru do Hanušovic trať více klesá, proto je možná průměrná rychlost v tomto směru o málo větší. Rozdíl ale není velký a lze uznat i argument, že vzniká zaokrouhlováním na celé minuty v jízdním řádu. **2 body**

b) Délka trati je $s = 20\,\mathrm{km}$. Pro jízdu směrem do Hanušovic, která trvá $t_1 = 29\,\mathrm{min} \doteq 0{,}483\,33\,\mathrm{h}$, vychází průměrná rychlost

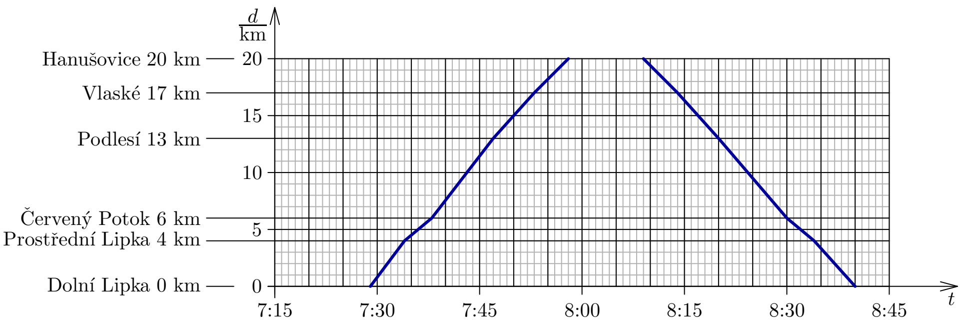
$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{20\,\mathrm{km}}{0{,}483\,33\,\mathrm{h}} \doteq 41{,}379\,\mathrm{km/h} \doteq 41\,\mathrm{km/h} \qquad (\text{asi } 11{,}5\,\mathrm{m/s}),$$

pro jízdu směrem do Dolní Lipky, která trvá $t_2 = 31\,\mathrm{min} \doteq 0{,}516\,67\,\mathrm{h}$, dostáváme

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{20\,\mathrm{km}}{0{,}516\,67\,\mathrm{h}} \doteq 38{,}710\,\mathrm{km/h} \doteq 39\,\mathrm{km/h} \qquad (\text{asi } 10{,}8\,\mathrm{m/s}).$$

2 body

c) Graf je na obr. 1



Obr. 1: Příklad grafu pro pohyb dopoledních spojů

3 body

Graf roste nejrychleji při stoupání z Dolní Lipky do Prostřední Lipky (4 km za 5 min) a při klesání z Červeného Potoka do Podlesí (7 km za 9 min). Protože $4/5 > 7/9$, je nejvyšší průměrná rychlost v prvním úseku. **1 bod**

Poznámka: Pozornější řešitelé si mohou všimnout, že právě v těchto úsecích trvá podle jízdního řádu jízda v opačném směru o minutu déle.

d) Viktor musí ujít vzdálenost $d = 20\,\mathrm{km} - 4\,\mathrm{km} = 16\,\mathrm{km}$, což mu rychlostí $v_\mathrm{v} = 3{,}5\,\mathrm{km/h}$ bude trvat čas
$$t_3 = \frac{d}{v_\mathrm{v}} = \frac{16\,\mathrm{km}}{3{,}5\,\mathrm{km/h}} \doteq 4{,}571\,4\,\mathrm{h} \doteq 4\,\mathrm{h}\,34\,\mathrm{min}.$$
Pokud vyjde v 9:25 a stráví ještě navíc 30 min odpočinkem na svačinu, do Hanušovic dorazí v čase
$$t_\mathrm{v} = 9{:}25 + 4{:}34 + 0{:}30 = 14{:}29,$$
asi o 1 h a 25 min dříve, než kdyby jel prvním odpoledním vlakem 20523. Rozhodnutí, zda čekat a nebo jít pěšky je pochopitelně hodně individuální. **2 body**

FO61EF1–2: Usain Bolt a jeho světový rekord

a) Celkový čas získáme sečtením časů na jednotlivých úsecích
$$t = 1{,}89\,\mathrm{s}+0{,}99\,\mathrm{s}+0{,}90\,\mathrm{s}+0{,}86\,\mathrm{s}+0{,}83\,\mathrm{s}+0{,}82\,\mathrm{s}+0{,}81\,\mathrm{s}+0{,}82\,\mathrm{s}+0{,}83\,\mathrm{s}+0{,}83\,\mathrm{s} = 9{,}58\,\mathrm{s}.$$
2 body

b) Nejkratšího času dosáhl mezi 60–70 m dráhy ($t_\mathrm{min} = 0{,}81\,\mathrm{s}$), nejdelšího při startu na úseku 0–10 m ($t_\mathrm{max} = 1{,}89\,\mathrm{s}$). Pro rychlosti v těchto úsecích dostáváme při stejné délce $d = 10\,\mathrm{m}$
$$v_\mathrm{max} = \frac{d}{t_\mathrm{min}} = \frac{10\,\mathrm{m}}{0{,}81\,\mathrm{s}} \doteq 12{,}346\,\mathrm{m/s} \doteq 44{,}444\,\mathrm{km/h} \doteq 44\,\mathrm{km/h},$$
$$v_\mathrm{min} = \frac{d}{t_\mathrm{max}} = \frac{10\,\mathrm{m}}{1{,}89\,\mathrm{s}} \doteq 5{,}291\,0\,\mathrm{m/s} \doteq 19{,}048\,\mathrm{km/h} \doteq 19\,\mathrm{km/h}.$$
3 body

Poznámka: Někteří řešitelé mohou uvažovat tak, že odečtou reakční dobu, takže budou uvažovat čas $t_\mathrm{max} = 1{,}89\,\mathrm{s} - 0{,}146\,\mathrm{s} = 1{,}744\,\mathrm{s}$ a dospějí k hodnotě minimální rychlosti
$$v_\mathrm{min} = \frac{d}{t_\mathrm{max}} = \frac{10\,\mathrm{m}}{1{,}744\,\mathrm{s}} \doteq 5{,}733\,9\,\mathrm{m/s} \doteq 20{,}642\,\mathrm{km/h} \doteq 21\,\mathrm{km/h}.$$
I když úvaha neodpovídá definici průměrné rychlosti na daném úseku, doporučujeme i tento výsledek uznat za správný.

c) Průměrná rychlost na celé dráze $s = 100\,\mathrm{m}$ vychází
$$v = \frac{s}{t} = \frac{100\,\mathrm{m}}{9{,}58\,\mathrm{s}} \doteq 10{,}438\,\mathrm{m/s} \doteq 37{,}578\,\mathrm{km/h} \doteq 38\,\mathrm{km/h}.$$
1 bod

d) Pokud by Usain Bolt zkrátil reakční dobu z $\tau = 146\,\mathrm{ms} = 0{,}146\,\mathrm{s}$ na $\tau_1 = 101\,\mathrm{ms} = 0{,}101\,\mathrm{s}$ (rekord kanadského běžce Surina Brunyho z roku 1999; pokud by vyběhl dříve než 0,1 s po výstřelu, šlo by podle pravidel o předčasný start), zkrátila by se celková doba závodu na
$$t_1 = t - \tau + \tau_1 = 9{,}58\,\mathrm{s} - 0{,}146\,\mathrm{s} + 0{,}101\,\mathrm{s} = 9{,}535\,\mathrm{s} \doteq 9{,}54\,\mathrm{s},$$
ale jeho průměrná rychlost by se zvýšila jen nepatrně:
$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{100\,\mathrm{m}}{9{,}535\,\mathrm{s}} \doteq 10{,}488\,\mathrm{m/s} \doteq 37{,}756\,\mathrm{km/h} \doteq 38\,\mathrm{km/h}.$$
2 body

e) Pokud přičteme průměrný čas získaný podporou větru při závodě v roce 2009 v Berlíně 0,06 s a naopak odečteme čas 0,11 s, který by teoreticky mohl ušetřit díky silnějšímu větru, k hodnotě $t_1 = 9{,}535\,\mathrm{s}$ získané v předchozí části d) po zkrácení reakční doby, zjistíme, že za takových podmínek by jamajský rekordman dosáhl času

$$t_2 = 9{,}535\,\mathrm{s} + 0{,}06\,\mathrm{s} - 0{,}11\,\mathrm{s} = 9{,}485\,0\,\mathrm{s} \doteq 9{,}49\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

Dodejme, že podle pravidel rychlost větru při sprinterských závodech nesmí překročit uvažovanou hodnotu 2 m/s.

Poznámka: Úloha je inspirována knihou Barrow J. D. (2015), *Sto důležitých věcí o sportu, které nevíte (a ani nevíte, že je nevíte)*, Praha: Dokořán.

FO61EF1–3: Úsporný dům

a) Tři nádrže můžeme považovat za jeden válec o celkové výšce

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = 750\,\mathrm{mm} + 750\,\mathrm{mm} + 1\,000\,\mathrm{mm} = 2\,500\,\mathrm{mm} = 2{,}5\,\mathrm{m}.$$

Objem vody v jímce může dosáhnout hodnoty

$$\frac{\pi d^2}{4}h = \frac{\pi \cdot (2{,}5\,\mathrm{m})^2}{4} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} \doteq 12{,}272\,\mathrm{m}^3 \doteq 12{,}3\,\mathrm{m}^3.$$ **2 body**

b) Rodina odebere z jímky objem $V_1 = 120\,\mathrm{hl} = 12\,\mathrm{m}^3$, ušetří tak za měsíc $12\,\mathrm{m}^3 \cdot 65\,\mathrm{Kč/m}^3 = 780\,\mathrm{Kč}$. **1 bod**

c) Roční úhrn srážek získáme sečtením hodnot za jednotlivé měsíce v tabulce, vychází $681\,\mathrm{mm/m}^2$, za rok tedy napadlo 681 litrů na každý m^2. **1 bod**

d) V dubnu napadlo 47 litrů vody na každý m^2. Protože střecha přesahuje na každé straně o $d = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$, je celková plocha střechy

$$S = (a + 2d) \cdot (b + 2d) =$$
$$= (12\,\mathrm{m} + 2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m}) \cdot (15\,\mathrm{m} + 2 \cdot 0{,}2\,\mathrm{m}) = 190{,}96\,\mathrm{m}^2 \doteq 191\,\mathrm{m}^2.$$

Za měsíc duben, tj. k 1. 5. tedy bylo do jímky svedeno

$$47\,\mathrm{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\mathrm{m}^2 \doteq 8\,975{,}1\,\mathrm{l} \doteq 90\,\mathrm{hl}\ \text{vody}.$$ **2 body**

K 1. 6. přibylo

$$61\,\mathrm{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\mathrm{m}^2 \doteq 11\,648\,\mathrm{l} \doteq 117\,\mathrm{hl},$$

ubylo 120 hl, v jímce je tedy $90\,\mathrm{hl} + 117\,\mathrm{hl} - 120\,\mathrm{hl} = 87\,\mathrm{hl}$ vody.
K 1. 7. přibylo

$$75\,\mathrm{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\mathrm{m}^2 = 14\,322\,\mathrm{l} \doteq 143\,\mathrm{hl},$$

ubylo 120 hl, v jímce je tedy $87\,\mathrm{hl} + 143\,\mathrm{hl} - 120\,\mathrm{hl} = 110\,\mathrm{hl}$ vody.
K 1.8.přibylo

$$67\,\mathrm{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\mathrm{m}^2 \doteq 12\,794\,\mathrm{l} \doteq 128\,\mathrm{hl},$$

ubylo 120 hl, v jímce je tedy $110\,\mathrm{hl} + 128\,\mathrm{hl} - 120\,\mathrm{hl} = 118\,\mathrm{hl}$ vody.
K 1. 9. přibylo

$$69\,\mathrm{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\mathrm{m}^2 \doteq 13\,176\,\mathrm{l} \doteq 132\,\mathrm{hl},$$

ubylo 120 hl, v jímce by mělo být $118\,\mathrm{hl} + 132\,\mathrm{hl} - 120\,\mathrm{hl} = 130\,\mathrm{hl}$ vody. To je ale více, než je celkový objem jímky $V = 123\,\mathrm{hl}$, více vody nelze pojmout. Jímka bude plná a bude obsahovat 123 hl vody.

K 1. 10.přibylo

$$56\,\text{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\text{m}^2 \doteq 10\,694\,\text{l} \doteq 107\,\text{hl},$$

ubylo 120 hl, v jímce je tedy 123 hl + 107 hl − 120 hl = 110 hl vody.
K 1. 11. přibylo

$$46\,\text{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\text{m}^2 \doteq 8\,784{,}2\,\text{l} \doteq 88\,\text{hl},$$

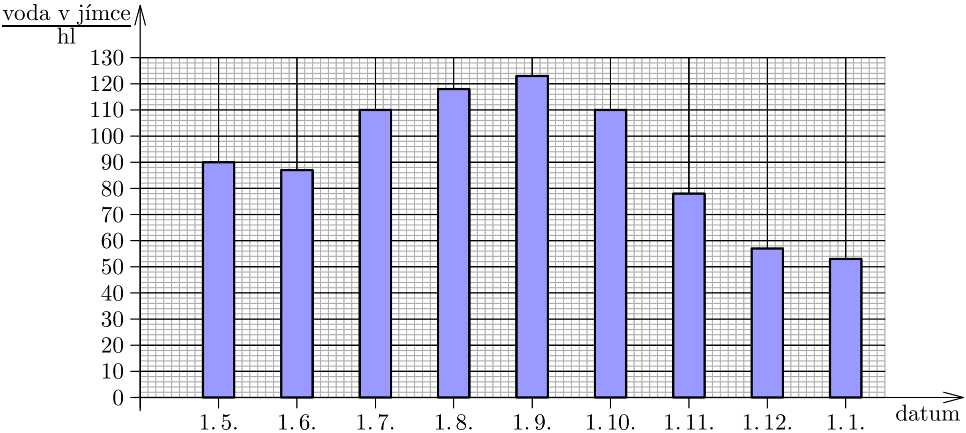
ubylo 120 hl, v jímce je tedy 110 hl + 88 hl − 120 hl = 78 hl vody.
K 1. 12. přibylo

$$52\,\text{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\text{m}^2 \doteq 9\,929{,}9\,\text{l} \doteq 99\,\text{hl},$$

ubylo 120 hl, v jímce je tedy 78 hl + 99 hl − 120 hl = 57 hl vody.
K 1. 1. přibylo

$$61\,\text{litrů/m}^2 \cdot 190{,}96\,\text{m}^2 \doteq 11\,649\,\text{l} \doteq 116\,\text{hl},$$

ubylo 120 hl, v jímce je tedy 57 hl + 116 hl − 120 hl = 53 hl vody.
Grafické znázornění objemu vody v jímce vždy k prvnímu dni v měsíci je na obr. 2.



Obr. 2: Příklad grafu závislosti objemu vody v jímce k 1. dni v měsíci

4 body

FO61EF1–4: Dva automobily a dva tunely

a) Doba průjezdu automobilu tunelem vychází

$$t_1 = \frac{l}{u} = \frac{3\,\text{km}}{40\,\text{km/h}} = 0{,}075\,\text{h} = 4{,}5\,\text{min}.$$ **1 bod**

b) Druhý automobil do prvního tunelu vjede za dobu

$$t_2 = \frac{L}{v} = \frac{6\,\text{km}}{60\,\text{km/h}} = 0{,}1\,\text{h} = 6\,\text{min}.$$

První automobil od opuštění tunelu ujede ještě vzdálenost

$$s_1 = v\,(t_2 - t_1) = 60\,\text{km/h} \cdot (0{,}10\,\text{h} - 0{,}075\,\text{h}) = 1{,}5\,\text{km}.$$

Vzdálenost mezi automobily tedy bude

$$x_1 = l + s_1 = 3\,\text{km} + 1{,}5\,\text{km} = 4{,}5\,\text{km}.$$ **2 body**

c) Doba jízdy automobilů mezi tunely vychází

$$t_3 = \frac{l}{v} = \frac{3\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{km/h}} = 0{,}05\,\mathrm{h} = 3\,\mathrm{min}.$$

Druhý automobil bude v tunelu po dobu $t_1 = 4{,}5\,\mathrm{min}$. První automobil z této doby pojede ještě

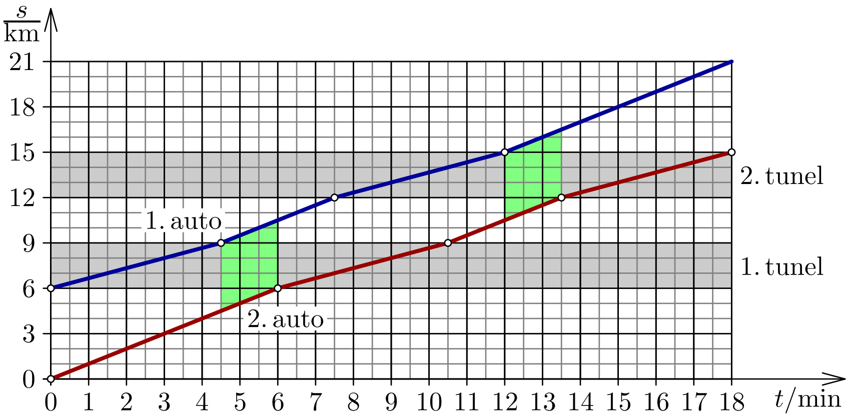
$$t_4 = \frac{l - s_1}{v} = \frac{3\,\mathrm{km} - 1{,}5\,\mathrm{km}}{60\,\mathrm{km/h}} = 0{,}025\,\mathrm{h} = 1{,}5\,\mathrm{min}$$

mezi tunely a zbylý čas $t_1 - t_4 = 4{,}5\,\mathrm{min} - 1{,}5\,\mathrm{min} = 3\,\mathrm{min} = 0{,}05\,\mathrm{h} = t_3$ bude projíždět druhým tunelem, kde ujede vzdálenost

$$s_4 = ut_3 = 40\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}05\,\mathrm{h} = 2{,}0\,\mathrm{km}.$$

Hledaná vzdálenost mezi automobily tedy bude $x_2 = l + s_4 = 3{,}0\,\mathrm{km} + 2{,}0\,\mathrm{km} = 5{,}0\,\mathrm{km}$. **2 body**

d) Graf je na obr. 3

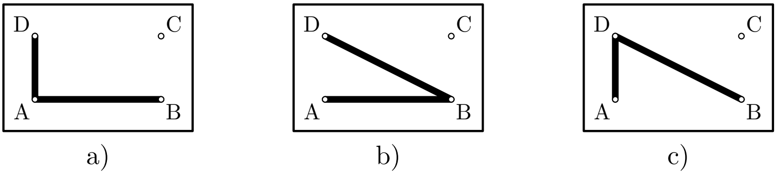


Obr. 3: Příklad grafu pro pohyb automobilů

Vidíme, že nejmenší vzdálenost mezi automobily je v čase od $t_1 = 4{,}5\,\mathrm{min}$, kdy první automobil vyjíždí z tunelu, do $t_2 = 6\,\mathrm{min}$, kdy druhý automobil přijíždí k tunelu (oblast je v grafu vyznačena zelenou barvou). Tato vzdálenost je podle části b) $x_1 = 4{,}5\,\mathrm{km}$. **5 bodů**

Poznámka: Stejná vzdálenost mezi automobily bude také mezi časem 12 min, kdy první automobil vyjíždí ze druhého tunelu, a 13,5 min, kdy do něho vjede druhý automobil.

FO61EF1–5: Destička se žárovkou



Obr. 4: Destička se zdířkami

a) Jsou tři možnosti schematicky nakreslené na obr. 4a), b) a c). Zdířky A, B a D jsou navzájem propojeny, zdířka C není spojena s žádnou ze tří ostatních. **7 bodů**

b) Žárovka svítí ve všech uvedených případech, protože zdířky B, D jsou spolu spojeny. **3 body**

FO61EF1–6: Tepelná elektrárna Dětmarovice

a) Při plném výkonu $P_1 = 800\,\mathrm{MW}$ by elektrárna za rok, tj, čas $t_1 = 365\,\text{dnů} = 365 \cdot 86\,400\,\mathrm{s} = 31\,536\,000\,\mathrm{s}$ vyrobila

$$E_1 = P_1 t_1 = 800\,\mathrm{MW} \cdot 31\,536\,000\,\mathrm{s} \doteq 25\,229\,000\,000\,\mathrm{MJ} \doteq 25\,000\,\mathrm{TJ}.$$ **2 body**

Poznámka: Uznat lze samozřejmě, pokud řešitelé použijí délku roku $t_1 = 365{,}25$ dne, při zaokrouhlení na 2 platné číslice bude číselný výsledek stejný.

b) Za jeden den se v elektrárně průměrně spotřebuje

$$m_\mathrm{d} = \frac{m}{365} = \frac{1\,400\,000\,\mathrm{t}}{365} \doteq 3\,835{,}6\,\mathrm{t} \doteq 3\,800\,\mathrm{t}$$

uhlí. Za rok je potřeba

$$n_1 = \frac{m}{m_1} = \frac{1\,400\,000\,\mathrm{t}}{50\,\mathrm{t}} = 28\,000$$

vagónů, za den průměrně

$$n_2 = \frac{m_\mathrm{d}}{m_1} = \frac{3\,835{,}6\,\mathrm{t}}{50\,\mathrm{t}} \doteq 76{,}712 \doteq 78$$

vagónů. **2 body**

c) Roční výroba elektrické energie je $E = 2{,}5\,\mathrm{TWh} = 3\,600\,\mathrm{s} \cdot 2{,}5\,\mathrm{TW} = 9\,000\,\mathrm{TJ}$. Spálením uhlí získáme teplo

$$Q_1 = mH = 1\,400\,000\,000\,\mathrm{kg} \cdot 22\,\mathrm{MJ/kg} = 30\,800\,000\,000\,\mathrm{MJ} = 30\,800\,\mathrm{TJ}.$$

Účinnost výroby elektrické energie vychází

$$\eta_1 = \frac{E}{Q_1} = \frac{9\,000\,\mathrm{TJ}}{30\,800\,\mathrm{TJ}} \doteq 0{,}292\,21 \doteq 29\,\%.$$ **2 body**

Pokud započítáme i využité teplo, bude účinnost o něco vyšší

$$\eta_2 = \frac{E + Q}{Q_1} = \frac{9\,000\,\mathrm{TJ} + 800\,\mathrm{TJ}}{30\,800\,\mathrm{TJ}} \doteq 0{,}318\,18 \doteq 31\,\%.$$ **1 bod**

d) Na ohřátí vody o hustotě $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ a objemu V je zapotřebí teplo $Q_2 = \varrho V c\,(t_2 - t_1)$, pro objem ohřátý vyrobeným teplem Q pak vychází

$$Q = \varrho V c\,(t_2 - t_1)\,,$$

$$V = \frac{Q}{\varrho c\,(t_2 - t_1)} = \frac{800\,000\,000\,000\,\mathrm{J}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (60\,^\circ\mathrm{C} - 15\,^\circ\mathrm{C})} \doteq$$

$$\doteq 4\,232\,800\,\mathrm{m^3} \doteq 4\,200\,000\,\mathrm{m^3}.$$

3 body

FO61EF1–7: Odstraněný rezistor

a) Odpor mezi body E a F bude

$$R_{EF} = \frac{R_5\,(R_3 + R_6)}{R_5 + R_3 + R_6} = \frac{100\,\Omega \cdot (50\,\Omega + 100\,\Omega)}{100\,\Omega + 50\,\Omega + 100\,\Omega} = 60\,\Omega.$$ **2 body**

b) Odpor mezi body C a D pak bude

$$R_{CD} = \frac{R_4\,(R_2 + R_{EF})}{R_4 + R_2 + R_{EF}} = \frac{110\,\Omega \cdot (50\,\Omega + 60\,\Omega)}{110\,\Omega + 50\,\Omega + 60\,\Omega} = 55\,\Omega.$$ **2 body**

c) Dále určíme celkový odpor zapojení

$$R = R_1 + R_{CD} = 55\,\Omega + 55\,\Omega = 110\,\Omega.$$

Ampérmetrem prochází proud

$$I = \frac{U}{R} = \frac{11\,\mathrm{V}}{110\,\Omega} = 0{,}1\,\mathrm{A}.$$ **2 body**

d) Při odstranění některého z rezistorů R_1 nebo R_2 neukáže voltmetr žádné napětí. **1 bod**

Při odstranění R_1 bude i proud procházející ampérmetrem nulový. **1 bod**

Při odstranění odporu R_2 bude celkový odpor obvodu

$$R' = R_1 + R_4 = 55\,\Omega + 110\,\Omega = 165\,\Omega$$

a ampérmetr naměří proud

$$I' = \frac{U}{R'} = \frac{11\,\mathrm{V}}{165\,\Omega} \doteq 67\,\mathrm{mA}.$$ **2 body**

FO61EF1–8: Na Téryho chatu

a) Práce odpovídá změně potenciální energie při převýšení $h_1 = 2\,005\,\mathrm{m} - 1\,255\,\mathrm{m} = 750\,\mathrm{m}$. Platí tedy

$$W_1 = (m_1 + m_{\mathrm{z}1})gh_1 = (55\,\mathrm{kg} + 15\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/m} \cdot 750\,\mathrm{m} = 514\,500\,\mathrm{J} \doteq 510\,\mathrm{kJ}.$$ **2 body**

Martin práci vykonal za čas $t_1 = 3{,}5\,\mathrm{h} = 12\,600\,\mathrm{s}$, jeho průměrný výkon proto byl

$$P_1 = \frac{W_1}{t_1} = \frac{514\,500\,\mathrm{J}}{12\,600\,\mathrm{s}} \doteq 40{,}833\,\mathrm{W} \doteq 41\,\mathrm{W}.$$ **1 bod**

b) Práci vykonanou nosičem vypočítáme podle podobného vztahu

$$W_2 = (m_2 + m_{\mathrm{z}2})gh_1 = (80\,\mathrm{kg} + 60\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/m} \cdot 750\,\mathrm{m} = 1\,029\,000\,\mathrm{J} \doteq 1{,}0\,\mathrm{MJ}$$

a jeho výkon za čas $t_2 = 90\,\mathrm{min} = 5\,400\,\mathrm{s}$ vychází

$$P_2 = \frac{W_2}{t_2} = \frac{1\,029\,000\,\mathrm{J}}{5\,400\,\mathrm{s}} \doteq 190{,}56\,\mathrm{W} \doteq 190\,\mathrm{W}.$$ **2 body**

Poznámka: Lze pochopitelně uznat i řešení, které využije poměr hmotností (jediného parametru, kterým se práce Martina a nosiče liší)

$$W_2 = W_1 \frac{m_2 + m_{\mathrm{z}2}}{m_1 + m_{\mathrm{z}1}} = W_1 \frac{80\,\mathrm{kg} + 60\,\mathrm{kg}}{55\,\mathrm{kg} + 15\,\mathrm{kg}} = 2W_1.$$

c) Užitečná práce na vynesení nákladu vychází

$$W_2' = m_{\mathrm{z}2}gh_1 = 60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/m} \cdot 750\,\mathrm{m} = 441\,000\,\mathrm{J} \doteq 440\,\mathrm{kJ}$$

a představuje

$$\frac{W_2'}{W_2} \equiv \frac{m_{\mathrm{z}2}}{m_2 + m_{\mathrm{z}2}} = \frac{441\,000\,\mathrm{J}}{1\,029\,000\,\mathrm{J}} \doteq 0{,}428\,57 \doteq 43\,\%$$

celkové práce. **2 body**

d) Mezi vykonanou prací a silou platí vztah $W_2 = Fs_1$, odkud

$$F = \frac{W_2}{s_1} = \frac{1\,029\,000\,\mathrm{J}}{6\,200\,\mathrm{m}} \doteq 165{,}97\,\mathrm{N} \doteq 170\,\mathrm{N}.$$ **1 bod**

e) Výkon nosiče při Sněžka Sherpa Cup 2019 při čase výstupu $t_3 = 2\,\mathrm{h}\,9\,\mathrm{min} = 7\,740\,\mathrm{s}$ vychází

$$P_3 = \frac{(m_2 + m_{z2})gh_2}{t_3} = \frac{(80\,\mathrm{kg} + 60\,\mathrm{kg}) \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/m} \cdot 780\,\mathrm{m}}{7\,740\,\mathrm{s}} \doteq 138{,}26\,\mathrm{W} \doteq 140\,\mathrm{W}.$$

Protože $P_3 \doteq 0{,}73 P_2 < P_2$, je větší výkon tatranského nosiče. **2 body**

Poznámka: Ve skutečnosti je výkon tatranského nosiče ještě větší, neboť zatímco trasa z Pece na Sněžku spojitě stoupá, trasa z Hrebienku na Téryho chatu zahrnuje i krátké úseky s klesáním a převýšení připadající na stoupání je přes 800 m.

FO61EF1–9: Podepřená kláda

a) Ze zadání vyplývá, že těžiště klády je ve vzdálenosti $d_1 = 3\,\mathrm{m}$ od tlustšího konce (a ve stejné vzdálenosti od poloviny klády). Pokud podpírající tyč posuneme o další $d_2 = 3\,\mathrm{m}$ (tj. pod střed klády) a na tenčí konec, tj. ve vzdálenosti $L/2 = 6\,\mathrm{m}$ od podpěry, si sedne Vašek o hmotnosti $m_1 = 60\,\mathrm{kg}$, pak z rovnosti momentů pro hmotnost m klády platí

$$md_2 g = \frac{1}{2} m_1 L g,$$ **3 body**

odkud vyjádříme

$$m = \frac{m_1 L}{2d_2} = \frac{60\,\mathrm{kg} \cdot 12\,\mathrm{m}}{2 \cdot 3\,\mathrm{m}} = 120\,\mathrm{kg}.$$ **2 body**

b) Označme d_3 hledanou vzdálenost místa, které podepřeme tyčí, od tlustšího konce klády. Těžiště klády je ve vzdálenosti $d_1 = 3\,\mathrm{m}$ od konce klády a tím $d_3 - d_1$ od tyče. Lenka na druhém konci pak sedí ve vzdálenosti $L - d_3$. Z rovnosti momentů v rovnováze plyne

$$m\,(d_3 - d_1)\,g = m_2\,(L - d_3)\,g$$ **2 body**

Z rovnice vyjádříme vzdálenost d_3 a dosadíme číselné hodnoty

$$md_3 - md_1 = m_2 L - m_2 d_3,$$

$$d_3 = \frac{md_1 + m_2 L}{m + m_2} = \frac{120\,\mathrm{kg} \cdot 3\,\mathrm{m} + 30\,\mathrm{kg} \cdot 12\,\mathrm{m}}{120\,\mathrm{kg} + 30\,\mathrm{kg}} = 4{,}8\,\mathrm{m}.$$ **3 body**

FO61EF1–10: Korková cihlička a závaží na vodě

Označme hustotu vody $\varrho_0 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{g/cm^3}$, hmotnost cihličky $m_1 = 250\,\mathrm{g}$ a její objem V_1, hmotnost závaží m_2, jeho objem V_2 a hustotu ϱ_2. Z podmínky rovnováhy mezi tíhovou a vztlakovou silou (obě působí ve svislém směru) v případě, že cihlička plave na vodě bez závaží, plyne

$$m_1 g = \frac{1}{4} V_1 \varrho_0 g, \tag{1}$$

kde $g = 9{,}8\,\mathrm{N/kg}$ je tíhové zrychlení. Odtud zjistíme objem cihličky

$$V_1 = \frac{4m_1}{\varrho_0} = \frac{4 \cdot 250\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g/cm^3}} = 1\,000\,\mathrm{cm^3}.$$ **2 body**

Ve druhém případě, kdy připevníme závaží, je navíc tíhová síla závaží kompenzována větší vztlakovou silou při hlubším ponoření. Oproti $\frac{1}{4}V_1$ jsou nyní ponořeny $\frac{3}{4}V_1$, platí tedy

$$m_2 g = \left(\frac{3}{4}V_1 - \frac{1}{4}V_1\right)\varrho_0 g = \frac{1}{2}V_1\varrho_0 g. \tag{2}$$

Odtud přímo vychází

$$m_2 = \frac{1}{2}V_1\varrho_0 = \frac{1}{2}\cdot 1\,000\,\mathrm{cm}^3\cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 = 500\,\mathrm{g}.$$ **3 body**

Ve třetím případě, kdy je ponořeno celé závaží, platí

$$m_2 g + m_1 g = V_2\varrho_0 g + \frac{1}{2}V_1\varrho_0 g,$$

a po dosazení za m_1 z rovnice (1) a za m_2 z rovnice (2) získáme

$$\frac{1}{2}V_1\varrho_0 + \frac{1}{4}V_1\varrho_0 = V_2\varrho_0 + \frac{1}{2}V_1\varrho_0,$$

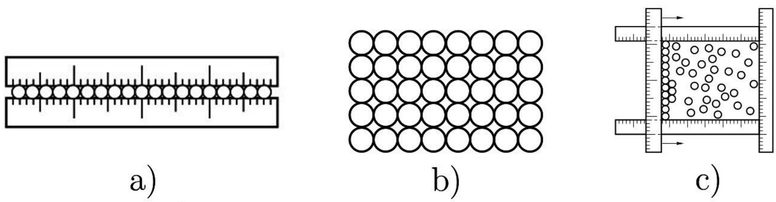
$$V_2 = \frac{1}{4}V_1 = \frac{1}{4}\cdot 1\,000\,\mathrm{cm}^3 = 250\,\mathrm{cm}^3.$$

Hustotu ϱ_2 již snadno dopočítáme ze známé hmotnosti a objemu závaží

$$\varrho_2 = \frac{m_2}{V_2} = \frac{500\,\mathrm{g}}{250\,\mathrm{cm}^2} = 2\,\mathrm{g/cm}^3.$$ **5 bodů**

Poznámka: Lze uznat i řešení úvahou bez počítání rovnic.

FO61EF1–11: Experimentální úloha: počítáme velká množství



Obr. 5: Možné uspořádání měření

Pro určení průměru D jedné kuličky seřadíme N kuliček těsně vedle sebe mezi dvě pravítka (obr. 5a) a změříme délku řady. Průměr pak spočítáme pole vztahu $D = L/N$. Dodejme, že měření jedné kuličky pravítkem je poměrně nepřesné (žáci si to mohou vyzkoušet a porovnat výsledky).

Pokud uložíme kuličky do a řad a b sloupců, bude jejich celkový počet $N = ab$ (obr. 5b). Postupovat přitom můžeme například tak, že ze 3 pravítek si vytvoříme rámeček a čtvrtým pravítkem budeme kuličky natěsno rovnat vedle sebe (obr. 5c). Lze samozřejmě uznat a bodovat i jiné zajímavé nápady.