Řešení úloh krajského kola 62. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Úlohy navrhli: J. Trnka (1), J. Thomas (2, 3) a J. Jírů (4)

1. a) Kvádr sjede ze střechy, pokud bude složka tíhové síly větší, než síla tření, tedy

$$mg\cos\frac{\varphi}{2} \geq fmg\sin\frac{\varphi}{2} \quad\Rightarrow\quad f \leq \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}.$$

2 body

b) Zrychlení kvádru během pohybu je

$$a = g\left(\cos\frac{\varphi}{2} - f\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

délka střechy $l = \dfrac{h}{\cos\frac{\varphi}{2}}$. Pro čas t_1 potom platí

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - f\sin\frac{\varphi}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{4h}{g\left(1+\cos\varphi - f\sin\varphi\right)}}.$$

2 body

c) Podle ZZE se potenciální energie kvádru přemění jednak na teplo při jeho pohybu na střeše, jednak na kinetickou energii

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + fmg\sin\frac{\varphi}{2}\frac{h}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}mv^2 + fmgh\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad v = \sqrt{2g\left(H - fh\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

2 body

d) Uvažujme počátek soustavy souřadnic u paty domu, vodorovná osa je x, svislá y. Pro souřadnice kvádru po opuštění střechy platí

$$x = v_0 t\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$y = H - h - v_0 t\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde

$$v_0 = at_1 = g\left(\cos\frac{\varphi}{2} - f\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{\frac{4h}{g\left(1+\cos\varphi - f\sin\varphi\right)}}.$$

Pro místo dopadu je $y = 0$. Pro čas t_2 dostaneme

$$t_2 = \frac{\sqrt{v_0^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2g(H-h)} - v_0\cos\frac{\varphi}{2}}{g}.$$

2 body

Celková doba pohybu je $T = t_1 + t_2$.

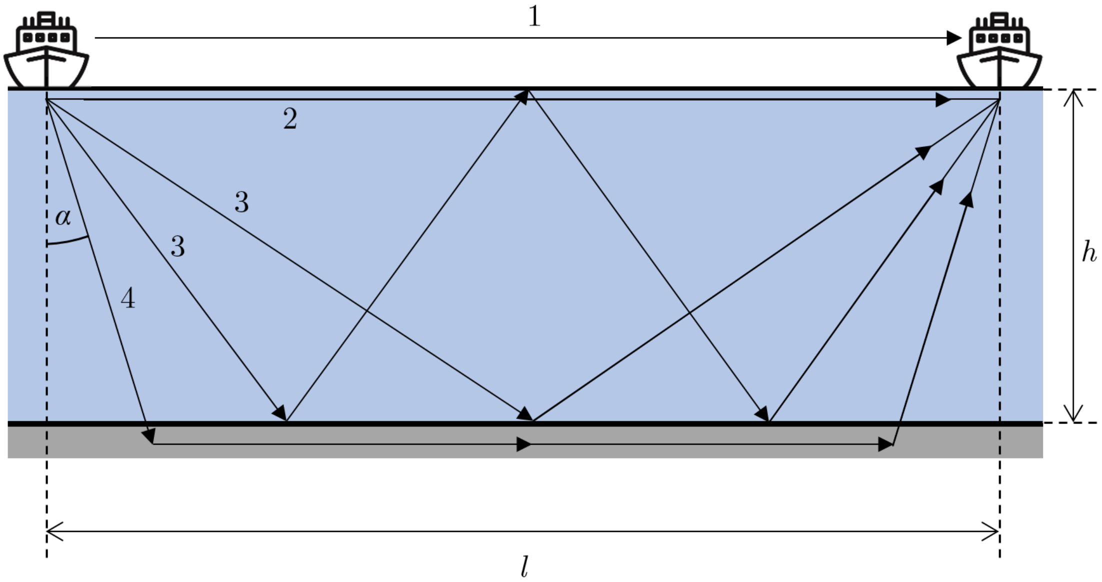
Pro místo dopadu dostaneme

$$d = v_0 t_2 \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{v_0 \sin\frac{\varphi}{2}}{g}\left(\sqrt{v_0^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2g(H-h)} - v_0\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

2 body

2. a) Zvukový signál může dospět ke druhé lodi několika cestami (obr. R1). Může se šířit přímo vzduchem, přímo vodou, může se odrazit n-krát ode dna a $(n-1)$-krát od vodní hladiny. Zvuk může projít i do mořského dna a šířit se podél něj i z něj zpět do vody. Dráha uražená zvukem bude nejkratší, bude-li splněna podmínka „mezního úhlu“, tj. zvukové vlnění se bude lámat rovnoběžně s rozhraním.

2 body



Obr. R1

b) Vypočítejme časy, za které dorazí zvukový signál k druhé lodi všemi způsoby popsanými v řešení úlohy a):

1. Signál, který se šíří vzduchem, dospěje ke druhé lodi za dobu $t_1 = \dfrac{l}{v_1} = 18\,\mathrm{s}$.

0,5 bodu

2. Signál, který se šíří vodou přímou cestou, dospěje ke druhé lodi za dobu $t_2 = \dfrac{l}{v_2} = 4,0\ s$.

0,5 bodu

3. Signál, který se odrazí n-krát ode dna a (n-1)-krát od vodní hladiny, urazí dráhu

$$s_{3n} = 2n\sqrt{\left(\frac{l}{2n}\right)^2 + h^2} = \sqrt{l^2 + 4n^2h^2},$$

zvuk tedy dorazí ke druhé lodi v časech

$$t_{3n} = \frac{s_{3n}}{v_2} = \frac{\sqrt{l^2 + 4n^2h^2}}{v_2}.$$

2 body

Pro $n = 1, 2, 3\ldots$ dostáváme časy $t_{31} = 4{,}5$ s, $t_{32} = 5{,}7$ s a $t_{33} = 7{,}2$ s.

0,5 bodu

4. Pro mezní úhel dopadu zvukové vlny na dno platí

$$\alpha = \arcsin\frac{v_2}{v_3} = 0{,}28\ \mathrm{rad} = 16{,}1^\circ.$$

1 bod

Doba šíření zvuku po dráze voda – dno – voda bude

$$t_4 = \frac{l - 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{v_3} + \frac{2h}{v_2\cos\alpha} = 3{,}0\ \mathrm{s},$$

1,5 bodu

případně po jednom „meziodrazu“ od vodní hladiny

$$t_5 = \frac{l - 4h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{v_3} + \frac{4h}{v_2\cos\alpha} = 5{,}0\ \mathrm{s},$$

0,5 bodu

po dvou meziodrazech od vodní hladiny

$$t_6 = \frac{l - 6h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{v_3} + \frac{6h}{v_2\cos\alpha} = 6{,}9\ \mathrm{s}.$$

0,5 bodu

První signál tedy bude na lodi zaregistrován v čase $t_4 = 3{,}0$ s, druhý v čase $t_2 = 4{,}0$ s, třetí v čase $t_{31} = 4{,}5$ s, čtvrtý v čase $t_5 = 5{,}0$ s, pátý v čase $t_{32} = 5{,}7$ s.

1 bod

3. a) Uvažujme 2. Kirchhoffův zákon pro smyčku vpravo. Aby diodou protékal elektrický proud, je nutné, aby na prostředním kondenzátoru bylo napětí větší než U_D. Na počátku tedy teče proud pouze levou smyčkou obvodu a nabíjí se pouze prostřední kondenzátor. Pokud bude $U_0 \leq 2U_D$, napětí na prostředním kondenzátoru nedosáhne takové hodnoty, aby proud pravou smyčkou tekl.

2 body

Uvažujme nejprve situaci $U_0 \leq 2U_D$. Po vzniku ustáleného stavu budou na kondenzátorech napětí

$$U_1 = \frac{U_0}{2}, \quad U_2 = \frac{U_0}{2}, \qquad U_3 = 0.$$

1 bod

b) Teplo, které se za tuto dobu uvolní v síti, zjistíme ze ZZE:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 2\frac{C\left(\frac{U_0}{2}\right)^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4}.$$

1 bod

c,d) Protože diodou proud neprocházel, uvolní se celé teplo na rezistoru.

0,5 bod

Nyní počítejme případ $U_0 > 2U_D$:

b) V případě, že proud poteče diodou, bude při nabíjení pravého kondenzátoru napětí U_3 na něm menší než U_2 na prostředním kondenzátoru o napětí na diodě; napětí na levém a prostředním kondenzátoru budou stejná: $U_1 = U_2 = U$.
Ze zákona zachování náboje

$$CU_0 = 2CU + C\left(U - U_D\right).$$

Odtud $U = \dfrac{U_0 + U_D}{3}$. **2 body**

c) Celkové uvolněné teplo určíme ze ZZE:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - 2\frac{CU^2}{2} - \frac{C(U-U_D)^2}{2} = \frac{C(U_0^2 - U_D^2)}{3}.$$

1 bod

d) Teplo, které se uvolní na diodě, je rovno $Q_D = q_D U_D$, kde $q_D = CU_3$ je náboj pravého kondenzátoru po skončení nabíjení. Po dosazení

$$Q_D = CU_3U_D = C\left(U - U_D\right)U_D = C\left(\frac{U_0 + U_D}{3} - U_D\right)U_D = \frac{CU_D(U_0 - 2U_D)}{3}.$$

2 body

e) Na rezistoru se uvolní teplo

$$Q_R = Q - Q_D = \frac{C(U_0^2 - U_D^2)}{3} - \frac{C(U_DU_0 - 2U_D^2)}{3} = \frac{C(U_0^2 - U_0U_D + U_D^2)}{3}.$$

0,5 bodu

4. a) Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce je

$$u = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Ba^2 = -a^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_0\sin\omega t = -a^2B_0\omega\cos\omega t,$$

kde $U_\mathrm{m} = a^2B_0\omega$ je amplituda napětí. Efektivní napětí má hodnotu

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}U_\mathrm{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2B_0\omega.$$

Střední výkon pak je

$$\bar{P}_0 = \frac{U^2}{R} = \frac{a^4B_0^2\omega^2}{2R}.$$

3 body

b) Obsah rámečku je k^2-násobný, tudíž indukované napětí je též k^2-násobné. Obvod rámečku je k-násobný, tudíž jeho odpor je také k-násobný. Proto platí

$$\bar{P}_1 = \frac{\left(k^2U\right)^2}{kR} = k^3\frac{U^2}{R} = k^3\bar{P}_0.$$

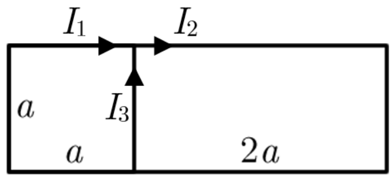
2 body

c) Obsah rámečku vzrostl třikrát, jeho obvod dvakrát, proto platí

$$\bar{P}_2 = \frac{(3U)^2}{2R} = \frac{9}{2}\frac{U^2}{R} = \frac{9}{2}\bar{P}_0.$$

2 body

d) Označme efektivní proudy I_1, I_2 a I_3 podle obrázku, U je opět efektivní napětí indukované ve čtvercovém rámečku s délkou strany a.



Obr. R2

Pomocí Kirchhoffových zákonů dostaneme

$$U = \frac{3}{4}RI_1 - \frac{1}{4}RI_2, \tag{1}$$

$$2U = \frac{1}{4}RI_2 + \frac{5}{4}RI_3, \tag{2}$$

$$I_1 + I_2 = I_3. \tag{3}$$

Z rovnic (1) a (2) vyjádříme proud I_1, I_3

$$I_1 = \frac{4U}{3R} + \frac{1}{3}I_2,$$

$$I_3 = \frac{8U}{5R} - \frac{1}{5}I_2.$$

a dosadíme do rovnice (3). Po úpravě dostaneme

$$I_2 = \frac{4}{23}\frac{U}{R}.$$

Zbývající proudy pak jsou

$$I_1 = \frac{32}{23}\frac{U}{R},$$

$$I_3 = \frac{36}{23}\frac{U}{R}.$$

Celkový střední výkon je součtem středních výkonů v jednotlivých větvích:

$$\bar{P}_3 = \frac{3}{4}RI_1^2 + \frac{1}{4}RI_2^2 + \frac{5}{4}RI_3^2 = \frac{3\cdot 32^2 + 1\cdot 4^2 + 5\cdot 36^2}{4\cdot 23^2}\frac{U^2}{R} = \frac{104}{23}\frac{U^2}{R} = \frac{104}{23}\bar{P}_0$$

3 body