Řešení úloh 1. kola 62. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 4, 7), J. Šlégr (5) a V. Koubek (6)

1.a) Největší rychlost ve vodorovném směru má kapka, která odkápne z kyvadla při jeho průchodu rovnovážnou polohou. Velikost této rychlosti odvodíme ze zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl\,(1-\cos\varphi) \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2gl(1-\cos\varphi)}.$$

Délku závěsu určíme z doby kmitu kyvadla $l = g\dfrac{T^2}{4\pi^2}$. Po dosazení

$$v = g\frac{T}{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}.$$

Z výšky $h-l$ dopadne kapka do vzdálenosti $s = v\sqrt{\dfrac{2\,(h-l)}{g}}$. Vzdálenost mezi místy, do kterých dopadnou kapky, které odkáply z nádoby při jejím průchodu rovnovážnou polohou, bude

$$2s = 2g\frac{T}{2\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\sqrt{\frac{2\left(h-g\dfrac{T^2}{4\pi^2}\right)}{g}} = 4g\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(h-g\dfrac{T^2}{4\pi^2}\right)(1-\cos\varphi)}{g}} =$$

$$= 2\frac{T}{\pi}\sqrt{g\left(h-g\frac{T^2}{4\pi^2}\right)(1-\cos\varphi)} = 0{,}31\ \text{m}.$$

3 body

Najdeme obecný vztah pro vzdálenost dopadnuvší kapky od místa pod rovnovážnou polohou kyvadla. Pro malé úhly můžeme pohyb kapky považovat za téměř vodorovný vrh. Ke vzdálenosti, do které kapka dopadne při vodorovném vrhu, přičteme vodorovnou výchylku kyvadla:

$$s_1 = l\sin\alpha + v_1\cos\alpha\sqrt{\frac{2\,(h-l+l-l\cos\alpha)}{g}} = l\sin\alpha+v_1\cos\alpha\sqrt{\frac{2\,(h-l\cos\alpha)}{g}},$$

kde $v_1 = \sqrt{2gl(\cos\alpha-\cos\varphi)}$. Pak

$$s_1 = l\sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{2gl(\cos\alpha-\cos\varphi)}\sqrt{\frac{2\,(h-l\cos\alpha)}{g}} =$$

$$= g\frac{T^2}{4\pi^2}\sin\alpha + 2\cos\alpha\sqrt{g\frac{T^2}{4\pi^2}(\cos\alpha-\cos\varphi)\left(h-g\frac{T^2}{4\pi^2}\cos\alpha\right)} =$$

$$= 9{,}81\cdot\frac{1}{\pi^2}\sin\alpha + 2\cos\alpha\sqrt{9{,}81\frac{1}{\pi^2}(\cos\alpha-\cos\varphi)\left(2{,}6-9{,}81\cdot\frac{1}{\pi^2}\cos\alpha\right)} =$$

$$= 0{,}994\sin\alpha + 2\cos\alpha\sqrt{0{,}994(\cos\alpha-0{,}9962)\,(2{,}6-0{,}994\cos\alpha)}.$$

Numericky pomocí Excelu můžeme zjistit, že největší vzdálenost odpovídá úhlu $\alpha = 0{,}04$ rad $= 2{,}29°$, a je to $s_1 = 0{,}178\,5$ m. Stopa na podlaze bude mít délku $2s_1 = 0{,}36$ m.

$\frac{\alpha}{\text{rad}}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045
$\frac{s_1}{\text{m}}$	0,155 9	0,160 7	0,164 9	0,168 6	0,171 8	0,174 4	0,176 4	0,177 8	0,178 5	0,178 0

$\frac{\alpha}{\text{rad}}$	0,05	0,055	0,06	0,065	0,07	0,075	0,08	0,085	0,087 266
$\frac{s_1}{\text{m}}$	0,177 2	0,175 7	0,172 5	0,168 2	0,162 3	0,153 8	0,141 3	0,119 1	0,086 6

3 body

b) Mají-li kapky z rovnovážné a krajní polohy dopadat do stejného místa, musí platit:

$$s = v\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 2\sqrt{lH(1-\cos\varphi)} = l\sin\varphi,$$

$$4lH(1-\cos\varphi) = l^2\sin^2\varphi.$$

Užitím zjednodušujících vzorců:

$$4lH\frac{\varphi^2}{2} = l^2\varphi^2 \quad\Rightarrow\quad H = g\frac{T^2}{8\pi^2} = 0{,}50\ \text{m}.$$

4 body

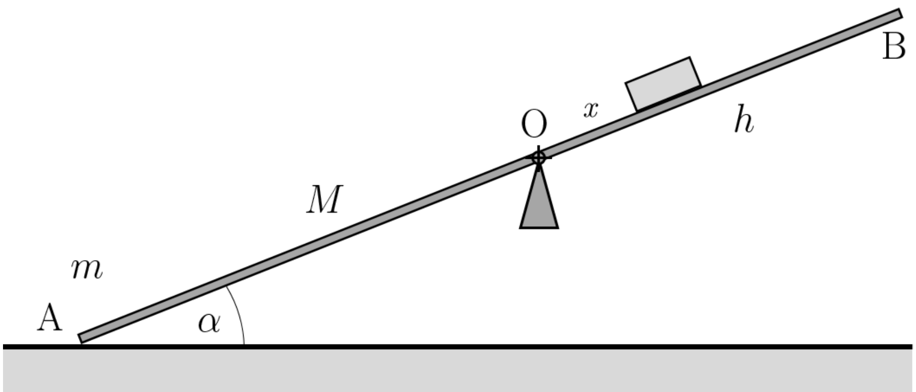
2. a, b) Normálová síla, kterou těleso působí na desku, je v okamžiku odlepení desky od vodorovné roviny rovna reakci opory $N = mg\cos\alpha$. Tělísko je nyní ve vzdálenosti x od opory (obr. R1).

Podle momentové věty vzhledem k ose, která prochází kloubem

$$Mg\left(\frac{l}{2}-h\right)\cos\alpha = Nx = mgx\cos\alpha.$$

Odtud

$$x = \frac{M}{m}\left(\frac{l}{2}-h\right) = \frac{M}{m}\frac{l-2h}{2}.$$



Obr. R1

V případě, že $x > h \Rightarrow \dfrac{M}{m} > \dfrac{2h}{l-2h}$ se deska neodlepí od roviny, ať bude tělesu udělena jakákoli rychlost.

Aby se spodní konec desky odpoutal od vodorovné roviny, musí tedy být splněna podmínka: $\dfrac{M}{m} \leq \dfrac{2h}{l-2h}$. **3 body**

Podle zákona zachování energie se kinetická energie tělesa přemění na potenciální energii tíhovou

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(l-h+x\right)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\left(l-h+\frac{M}{m}\frac{l-2h}{2}\right)\sin\alpha}.$$

3 body

c) I v tomto případě platí, že pro odpoutání spodního konce desky od vodorovné roviny musí být splněna podmínka $\dfrac{M}{m} \leq \dfrac{2h}{l-2h}$.

Podle ZZE nyní bude

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(l-h+x\right)\sin\alpha + fmg\cos\alpha\left(l-h+x\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\left(l-h+\frac{M}{m}\frac{l-2h}{2}\right)\sin\alpha + 2gf\cos\alpha\left(l-h+\frac{M}{m}\frac{l-2h}{2}\right)}.$$

4 body

3.a) Označme měrné tepelné kapacity při teplotě $t_1 = 0$ °C jako c_1, při teplotě $t_2 = 10$ °C jako c_2, při teplotě $t_3 = 30$ °C jako c_3 a při teplotě $t_4 = 40$ °C jako c_4. Teplo, které látka o hmotnosti m předá nebo obdrží v teplotním intervalu $< t_{\mathrm{i}},\ t_{\mathrm{j}} >$, kde se měrná tepelná kapacita mění lineárně, je $Q = m\dfrac{c_i + c_j}{2}(t_i - t_j)$.

Pak podle kalorimetrické rovnice

$$m_1\frac{c_1+c_2}{2}\left(t_2-t_1\right) = m_2\frac{c_2+c_3}{2}\left(t_3-t_2\right) + m_2\frac{c_3+c_4}{2}\left(t_4-t_3\right)$$

odtud $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\left(c_2+c_3\right)\left(t_3-t_2\right) + \left(c_3+c_4\right)\left(t_4-t_3\right)}{\left(c_1+c_2\right)\left(t_2-t_1\right)} = \dfrac{300 \cdot 20 + 360 \cdot 10}{240 \cdot 10} = 4.$

3 body

b) Z kalorimetrické rovnice

$$m_1\frac{c_1+c_2}{2}\left(t_2-t_1\right) + m_1\frac{c_2+c_3}{2}\left(t_3-t_2\right) = m_2\frac{c_3+c_4}{2}\left(t_4-t_3\right),$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\left(c_3+c_4\right)\left(t_4-t_3\right)}{\left(c_1+c_2\right)\left(t_2-t_1\right) + \left(c_2+c_3\right)\left(t_3-t_2\right)} = \frac{360 \cdot 10}{240 \cdot 10 + 300 \cdot 20} = \frac{2}{3}.$$

3 body

c) Na ohřátí chladnější látky z teploty t_1 na teplotu t_2 je potřeba látce dodat teplo

$$Q_{12} = m\frac{c_1+c_2}{2}\left(t_2-t_1\right) = \ \{m\} \cdot 1\,200\ \mathrm{J},$$

při ochlazení z teploty t_4 na teplotu t_3 1 kg teplejší látky uvolní teplo

$$Q_{43} = m\frac{c_3 + c_4}{2}\,(t_4 - t_3) = \ \{m\} \cdot 1\,800\ \text{J},$$

na ohřátí z teploty t_1 na teplotu t_3 naopak 1 kg chladnější látky spotřebuje teplo

$$Q_{123} = m\frac{c_1 + c_2}{2}\,(t_2 - t_1) + m\frac{c_2 + c_3}{2}\,(t_3 - t_2) = \{m\} \cdot 2\,150\ \text{J}.$$

Z toho, že $Q_{12} < Q_{43}$, avšak $Q_{123} > Q_{43}$, je zřejmé, že výsledná teplota t bude v intervalu $<t_2, t_3>$. V tomto rozmezí pro číselnou hodnotu měrné tepelné kapacity $\{c\}$ při výsledné teplotě t vyplývá z grafu vztah:

$$\{c\} = 140 + \left\{\frac{c_3 - c_2}{t_3 - t_2}(t - t_2)\right\} = 130 + \{t\}\,.$$

Nyní můžeme napsat kalorimetrickou rovnici

$$m\frac{c_1 + c_2}{2}\,(t_2 - t_1) + m\frac{c_2 + c_3}{2}\,(t - t_2) = m\frac{c_2 + c_3}{2}\,(t_3 - t) + m\frac{c_3 + c_4}{2}\,(t_4 - t_3)\,,$$

$$(c_1 + c_2)\,(t_2 - t_1) + (c_2 + c_3)\,(t - t_2) = (c_2 + c_3)\,(t_3 - t) + (c_3 + c_4)\,(t_4 - t_3)\,.$$

Číselně $240 \cdot 10 + (270 + t)\,(t - 10) = (t + 290)\,(30 - t) + 360 \cdot 10$.

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$t^2 + 260t - 6300 = 0,$$

jejíž kladný kořen $t = 22{,}3\ °\text{C}$. **4 body**

4.a) Protože je v obvodu zapojena cívka, bude proud v okamžiku zapnutí klíče nulový a bude postupně vzrůstat až do maximální hodnoty I_m. Prochází-li obvodem maximální proud, je napětí na cívce nulové a napětí na kondenzátoru U_1 se rovná elektromotorickému napětí U_e. Obvodem tedy prošel náboj

$$\Delta Q = CU_0 - CU_1 = C\,(U_0 - U_1) = C\,(U_0 - U_e) = 140\ \mu\text{C}.$$

2 body

Protože je v obvodu zapojena dioda, může proud procházet pouze proti elektrostatickým silám uvnitř zdroje. Zdroj přitom vykonal zápornou práci

$$W_z = -\Delta Q.U_e = -C.U_e\,(U_0 - U_e) = -700\ \mu\text{J}.$$

2 body

Při nabíjení získá cívka energii magnetického pole $E_m = \frac{1}{2}LI_m^2$. Rozdíl energií elektrického pole kondenzátoru v počátečním a konečném stavu je roven součtu práce potřebné na překonání elektrostatických sil uvnitř zdroje a energie magnetického pole cívky

$$\frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}CU_1^2 = CU_e\,(U_0 - U_1) + E_m = CU_e\,(U_0 - U_e) + \frac{1}{2}LI_m^2$$

odtud $I_m = (U_0 - U_e)\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}022\ \text{A}.$ **3 body**

b) Po průchodu maximem bude velikost proudu v obvodu klesat k nule. Napětí na kondenzátoru nyní bude U_k. Podle ZZE se rozdíl energií elektrostatického pole kondenzátoru spotřebuje na překonání elektrostatických sil uvnitř zdroje

$$\frac{1}{2}CU_0^2 - \frac{1}{2}CU_k^2 = CU_e\left(U_0 - U_k\right) \quad \Rightarrow \quad \left(U_0 - U_k\right)\left(U_0 - 2U_e + U_k\right) = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení. První řešení $U_k = U_0$ odpovídá počátečnímu stavu při zapnutí klíče; druhé řešení $U_k = 2U_e - U_0 = -2$ V odpovídá konečnému stavu. Došlo tedy k přepólování kondenzátoru. **3 body**

5.a) Pro elektromobil $E_e = 240$ Wh $= 8{,}64 \cdot 10^5$ J.
Pro spalovací motor platí, že na jeden kilometr je zapotřebí objem $V = 0{,}080$ l $=$ $= 0{,}080$ dm^3 $= 8{,}0 \cdot 10^{-5}$ m^3 paliva, kterému odpovídá hmotnost

$$m = \rho V = 0{,}000\ 080\ \mathrm{m}^3 \cdot 750\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 0{,}060\ \mathrm{kg}.$$

Energie uvolněná spálením 0,060 kg paliva je

$$E_t = mH = 0{,}060\ \mathrm{kg} \cdot 43{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 2{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{J}.$$

Poměr těchto energií je

$$\frac{E_e}{E_t} = \frac{8{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{J}}{2{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{J}} \cong \frac{1}{3}.$$

Automobil se spalovacím motorem tedy potřebuje k ujetí stejné vzdálenosti přibližně třikrát větší množství energie.

3 body

b) Mechanická práce pro elektromobil je $W_e = E_e\eta_e = 8{,}6 \cdot 10^5\ \mathrm{J} \cdot 0{,}90 = 7,7 \cdot 10^5$ J.
Mechanická práce spalovacího motoru $W_t = E_t\eta_t = 2{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{J} \cdot 0{,}30 = 7{,}8 \cdot 10^5$ J.
Je tedy zřejmé, že pro ujetí stejné vzdálenosti je mechanická práce téměř stejná.
3 body

c) V obou případech je zapotřebí dodat energii 85 000 Wh. Energie je součin výkonu a času:

$$E = Pt.$$

Protože má nabíjení pouze 85% účinnost, bude energie dodaná akumulátoru:

$$E = \eta Pt = \eta UIt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{E}{\eta UI}.$$

Pro jednofázové nabíjení: $t_{1f} = \dfrac{85\,000\ \mathrm{Wh}}{0{,}85 \cdot 230\ \mathrm{V} \cdot 16\ \mathrm{A}} = 27$ hodin,

Pro třífázové nabíjení $t_{3f} = \dfrac{85\,000\ \mathrm{Wh}}{3 \cdot 0{,}85 \cdot 400\ \mathrm{V} \cdot 32\ \mathrm{A}} = 2{,}6$ hodiny. **2 body**

Výpočet dojezdu získaného hodinovým nabíjením lze provést například následovně: Celkový dojezd na plně nabitou baterii je

$$s = \frac{85 \cdot 10^3\ \mathrm{Wh}}{240\ \mathrm{Wh} \cdot \mathrm{km}^{-1}} = 354\ \mathrm{km}.$$

Tento dojezd získáme v prvním případě během 27 hodin, v druhém za 2,6 hodiny. Proto platí

$$v_{1f} = \frac{354\ \mathrm{km}}{27\ \mathrm{h}} = 13\ \mathrm{km\cdot h^{-1}},$$

$$v_{3f} = \frac{354\ \mathrm{km}}{2{,}6\ \mathrm{h}} = 136\ \mathrm{km\cdot h^{-1}},$$

přičemž tato veličina má význam *rychlosti nabíjení.* Jednou fází tak za hodinu získáme dojezd 13 km, třífázovým nabíjením při proudu 32 A pak 136 km.

2 body

7.a) Protože nádoba je otevřená a píst se pohybuje bez tření, je počáteční tlak plynu roven atmosférickému tlaku. Při posunutí pístu o malou vzdálenost Δx vpravo, zvětší se objem nádoby o $S\Delta x$. Protože jsou stěny nádoby dokonale vodivé, bude podle Boyle – Mariotteova zákona platit

$$p_0V_0 = p_1\left(V_0 + S\Delta x\right) \quad\Rightarrow\quad p_1 = \frac{p_0V_0}{V_0+S\Delta x} = \frac{p_0}{1+\dfrac{S\Delta x}{V_0}} \approx p_0\left(1-\frac{S\Delta x}{V_0}\right).$$

Síla, která vrací píst zpět do rovnovážné polohy, tedy bude

$$F_p = p_0S\left(1-\frac{S\Delta x}{V_0}\right) - p_0S = -\frac{p_0S^2}{V_0}\Delta x.$$

Tuhost pak je $k = \dfrac{p_0S^2}{V_0} = 13{,}5\ \mathrm{kN\cdot m^{-1}}$. **3 body**

b) Podle Hookova zákona je napětí přímo úměrné prodloužení, tedy v našem případě

$$\sigma = \frac{F_p}{S} = \frac{p_0S}{V_0}\Delta x = E\varepsilon = p_0\frac{\Delta x}{\dfrac{V_0}{S}} \quad\Rightarrow\quad E = p_0 = 101\ \mathrm{kPa}.$$

3 body

c) V tomto případě jde o adiabatický děj, kdy se mění také teplota. Práce vykonaná plynem je rovna změně vnitřní energie

$$p_0S\Delta x = -\frac{5}{2}nR\Delta T.$$

Podle stavové rovnice na začátku a na konci děje

$$p_0V_0 = nRT,$$

$$p_1\left(V_0+S\Delta x\right) = nR\left(T+\Delta T\right).$$

Vyjádříme

$$p_1 = \frac{nRT+nR\Delta T}{V_0+S\Delta x} = \frac{1}{V_0}\frac{p_0V_0-\dfrac{2}{5}p_0S\Delta x}{1+\dfrac{S\Delta x}{V_0}} \approx p_0\left(1-\frac{2}{5}\frac{S\Delta x}{V_0}\right)\frac{1-\dfrac{S\Delta x}{V_0}}{1-\left(\dfrac{S\Delta x}{V_0}\right)^2}.$$

Při zanedbání členů vyšších řádů dostáváme $p_1 \approx p_0 \left(1 - \frac{7}{5}\frac{S\Delta x}{V_0}\right)$.
Pro sílu pružnosti pak platí

$$F_p = p_0 S \left(1 - \frac{7}{5}\frac{S\Delta x}{V_0}\right) - p_0 S = -\frac{7}{5}\frac{p_0 S^2}{V_0}\Delta x,$$

tuhost $k_1 = \frac{7}{5}\frac{p_0 S^2}{V_0} = 18{,}9\ \mathrm{kN \cdot m^{-1}}$ a modul pružnosti $E_1 = \frac{7}{5}p_0 = 141\ \mathrm{kPa}$.

4 body