Řešení úloh krajského kola 61. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autor úloh J. Thomas

1. a) Pro průměrnou rychlost platí $v_p = \dfrac{s}{t} = \dfrac{v_1\dfrac{t}{2} + v_2\dfrac{t}{2}}{t} = \dfrac{v_1+v_2}{2t}$.

Ke změně rychlosti $\Delta v = v_2 - v_1$ došlo za dobu $t = \dfrac{s}{v_p} = \dfrac{2s}{v_1+v_2}$, takže průměrné zrychlení bude $a_p = \dfrac{\Delta v}{t} = \dfrac{(v_2-v_1)(v_1+v_2)}{2s} = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$. **2 body**

b) Doba pohybu v tomto případě bude $t = \dfrac{s}{2v_1} + \dfrac{s}{2v_2} = \dfrac{s}{2}\dfrac{v_1+v_2}{v_1 v_2}$ a průměrná rychlost

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Průměrné zrychlení

$$a_p = \frac{\Delta v}{t} = \frac{(v_2-v_1)\,2v_1v_2}{s\,(v_1+v_2)}.$$

2 body

c) Počáteční rychlost na prvním úseku je nulová, počáteční rychlost na druhém úseku je rovna koncové rychlosti na prvním úseku. Celková dráha tedy bude

$$s = \frac{a_1\left(\dfrac{t}{2}\right)^2}{2} + a_1\frac{t}{2}\frac{t}{2} + \frac{a_2\left(\dfrac{t}{2}\right)^2}{2} = \frac{t^2}{8}\left(3a_1 + a_2\right).$$

Odtud můžeme vyjádřit čas $t = \sqrt{\dfrac{8s}{3a_1+a_2}}$, a průměrná rychlost pak bude

$$v_p = \frac{s}{t} = \sqrt{\frac{s\,(3a_1+a_2)}{8}}.$$

Rychlost se změní o $\Delta v = a_1\dfrac{t}{2} + a_2\dfrac{t}{2}$, proto průměrné zrychlení

$$a_p = \frac{\Delta v}{t} = \frac{a_1+a_2}{2}.$$

3 body

d) První polovinu dráhy urazí hmotný bod za dobu t_1, kterou můžeme určit ze vztahu

$$\frac{s}{2} = \frac{a_1 t_1^2}{2} \quad\Rightarrow\quad t_1 = \sqrt{\frac{s}{a_1}}.$$

Pro druhou polovinu dráhy platí $\frac{s}{2} = a_1 t_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2}$. Odtud můžeme po dosazení za t_1 najít dobu t_2 . Z kvadratické rovnice

$$\frac{a_2}{2} t_2^2 + t_2 \sqrt{a_1 s} - \frac{s}{2} = 0$$

vyhovuje kladný kořen

$$t_2 = \sqrt{s} \frac{\sqrt{a_1 + a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2}.$$

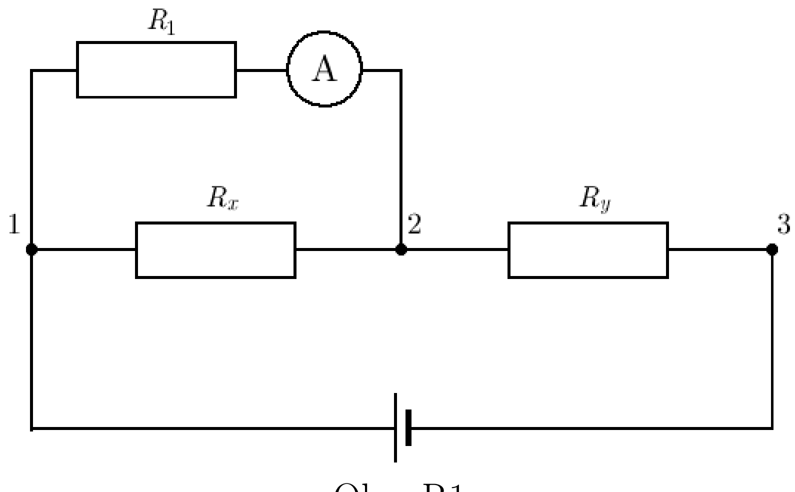
Průměrná rychlost pak

$$v_p = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\sqrt{\frac{s}{a_1}} + \sqrt{s} \frac{\sqrt{a_1 + a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2}} = \frac{a_2 \sqrt{a_1 s}}{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1 (a_1 + a_2)}}.$$

Průměrné zrychlení bude $a_p = \frac{\Delta v}{t_1 + t_2} = \frac{a_1 t_1 + a_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{a_2 \sqrt{a_1 (a_1 + a_2)}}{a_2 - a_1 + \sqrt{a_1 (a_1 + a_2)}}$.

3 body

2. a) Připojením ampérmetru ke zdířkám 1 a 2 se změní schéma obvodu



Obr. R1

Rezistorem R_1 protéká proud $I_1 = \frac{U_{12}}{R_1}$, rezistorem R_x protéká proud $I_2 = \frac{U_{12}}{R_x}$.

Rezistorem R_y pak protéká proud $I_y = I_1 + I_x = U_{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} \right)$,

napětí na baterii $U_{13} = U_{12} + R_y I_y = U_{12} R_y \left(\frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} \right)$.

Odtud

$$U_{12} = \frac{U_{13}}{R_y \left(\frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} \right)} \quad \Rightarrow \quad R_y \left(\frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} \right) = 3. \qquad (1)$$

Připojením rezistoru s ampérmetrem mezi zdířky 2 a 3 dostaneme obdobně

$$U_{23} = \frac{U_{13}}{R_x\left(\dfrac{1}{R_y} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_x}\right)} \quad \Rightarrow \quad R_x\left(\frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x}\right) = \frac{9}{4}. \tag{2}$$

Ze vztahů (1) a (2)

$$\frac{U_{12}}{U_{23}} = \frac{R_x}{R_y} = \frac{3}{4}.$$

Po dosazení do vztahu (1) $\left(1 + \dfrac{R_y}{R_1} + \dfrac{R_y}{R_x}\right) = 3$ dostaneme $R_y = \dfrac{2}{3}R_1 =$ $= 0{,}67\ \mathrm{k\Omega}$ a $R_x = \dfrac{3}{4}R_y = \dfrac{1}{2}R_1 = 0{,}5\ \mathrm{k\Omega}$. **4 body**

b) Protože napětí mezi zdířkami 1 a 3 je vlastně elektromotorické napětí zdroje, naměří Bedřich stejné napětí jako Adam $U'_{13} = U_{13} = 4{,}5$ V. **2 body**

Připojí-li Bedřich svůj měřicí přístroj ke zdířkám 1 a 2, naměří napětí (s využitím vztahu (1))

$$U'_{12} = \frac{U_{13}}{R_y\left(\dfrac{1}{R_y} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_x}\right)} = \frac{U_{13}}{R_y\left(\dfrac{1}{R_y} + \dfrac{1}{2R_1} + \dfrac{1}{R_x}\right)} = \frac{U_{13}}{1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}} = \frac{3}{8}U_{13} = 1{,}7\ \mathrm{V};$$

2 body

na zdířkách 2 a 3 pak naměří napětí

$$U'_{23} = \frac{U_{13}}{R_x\left(\dfrac{1}{R_y} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_x}\right)} = \frac{U_{13}}{R_x\left(\dfrac{1}{R_y} + \dfrac{1}{2R_1} + \dfrac{1}{R_x}\right)} = \frac{U_{13}}{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}U_{13} = 2{,}3\ \mathrm{V}.$$

2 body

3. Ve všech případech dopadu elektronu na spodní desku, bez ohledu na směr počáteční rychlosti, je z důvodu zákona zachování energie velikost rychlosti dopadu v_1 stejná. Ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + e\frac{U}{2} = \frac{1}{2}mv_1^2$$

plyne pro velikost rychlosti dopadu na spodní desku

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{eU}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Také velikost zrychlení elektronu bez ohledu na směr pohybu má stejnou velikost

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{md}.$$

3 body

1) Doba letu elektronu bude

$$t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{\sqrt{v_0^2 + \frac{eU}{m}} - v_0}{\frac{eU}{md}} = \frac{md\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{eU}{m}} - v_0\right)}{eU} = 2{,}80 \cdot 10^{-8}\ \text{s}.$$

2 body

2) Elektron se pohybuje po části paraboly s vodorovnou počáteční rychlostí, to znamená, že svislá složka pohybu představuje rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu. Pro dobu t_2 jeho pohybu platí

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}at_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{d}{a}} = d\sqrt{\frac{m}{eU}} = 6{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{s}.$$

Elektron dopadne na desku pod úhlem α, pro který platí

$$\sin\alpha = \frac{v_0}{v_1} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + \frac{eU}{m}}} = 0{,}640\,8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 40^\circ.$$

2 body

3) Elektron se pohybuje rovnoměrně zpomaleně. Nejprve pomocí číselných hodnot porovnáme počáteční kinetickou energii E_k s přírůstkem potenciální energie ΔE_p nutným k dosažení horní desky:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}4 \cdot 10^6)^2\ \text{J} = 8{,}9 \cdot 10^{-19}\ \text{J},$$

$$\Delta E_\mathrm{p} = e\frac{U}{2} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{16}{2}\ \text{J} = 12{,}8 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Jelikož $E_\mathrm{k} < \Delta E_\mathrm{p}$, elektron k horní desce nedoletí a po dosažení nulové rychlosti se začne pohybovat rovnoměrně zrychleně k dolní desce, na kterou dopadne též rychlostí o velikosti v_1 jako v předchozích dvou případech. Celková doba letu bude

$$t_1 = \frac{v_0}{a} + \frac{v_1}{a} = \frac{v_0 + v_1}{a} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + \frac{eU}{m}}}{\frac{eU}{md}} =$$

$$= \frac{md\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + \frac{eU}{m}}\right)}{eU} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{s}.$$

3 body

4. a) Tíhová síla splávku tvoří se vztlakovou silou dvojici sil. Těžiště proto musí ležet ve vzdálenosti menší, než je vzdálenost působiště vztlakové síly, tedy

$$x < \frac{l}{3} = 2{,}7\ \text{cm},$$

jinak dvojice sil splávek položí.

2 body

b) V rovnovážné poloze jsou tíhová a vztlaková síla, které působí na splávek, v rovnováze, tj.

$$F_G = S\rho l g = \frac{2}{3} S\rho_v l g,$$

odkud $\rho = \frac{2}{3}\rho_v$. Při vychýlení splávku ve svislém směru o vzdálenost y, bude ho do rovnovážné polohy vracet síla

$$F = ma = mg - S\rho_v\left(\frac{2}{3}l + y\right)g = \frac{2}{3}S\rho_v l g - \frac{2}{3}S\rho_v l g - S\rho_v g y = -S\rho_v g y = -ky,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}S\rho_v l}{S\rho_v g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 0{,}46\ \mathrm{s}.$$

3 body

c) Je-li plocha podstavy splávku S, bude plocha podstavy válce s vodou $4S$; mezikruží má pak plochu $3S$. Při poklesu splávku o vzdálenost y vzhledem k rovnovážné poloze se v úzké nádobě zároveň zvýší hladina vody o $\frac{y}{3}$. Splávek bude tedy nyní do rovnovážné polohy vracet síla

$$F = mg - S\rho_v\left(\frac{2}{3}l + y + \frac{y}{3}\right)g = -\frac{4}{3}S\rho_v g y,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} = 0{,}40\ \mathrm{s}.$$

5 bodů