**Řešení úloh 1. kola 61. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3, 5, 7), J. Jírů (4, 6) a P. Šedivý (6)

**1.** a) V okamžiku, kdy Zdeňka míjí začátek předposledního vagónu, uplynul od začátku pohybu vlaku čas $t_0$ a vlak má rychlost $v_0$. V čase $(t_0 + t_1)$ míjí Zdeňka začátek posledního vagónu a vlak má rychlost $v_1 = a\,(t_0 + t_1)$. Když Zdeňka míjí konec posledního vagónu, má vlak rychlost $v_2 = a\,(t_0 + t_1 + t_2)$. Vagóny mají stejnou délku, proto

$$\frac{at_0 + a\,(t_0 + t_1)}{2}t_1 = \frac{a(t_0 + t_1) + a\,(t_0 + t_1 + t_2)}{2}t_2.$$

Odtud

$$t_0 = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2\,(t_1 - t_2)} = 14\ \mathrm{s}.$$

Vlak tedy vyjel před dobou $t = t_0 + t_1 + t_2 = 20$ s. **4 body**

b) Uvážíme-li, že se vlak rozjíždí se zrychlením $a$ po dobu $t$ a délka jednoho vagónu je $s$, pak

$$ns = \frac{1}{2}at^2.$$

Délka jednoho vagónu je také

$$s = \frac{at_0 + a\,(t_0 + t_1)}{2}t_1,$$

po úpravě pak

$$n = \frac{t^2}{(2t_0 + t_1)\,t_1} = 4{,}0.$$

Souprava má čtyři vagóny. **3 body**

c) Dráhu, kterou vlak urazí, můžeme vypočítat jako obsah lichoběžníka z grafu závislosti rychlosti na čase:

$$s_z = v\frac{t_z + (t_z - \Delta t)}{2}.$$

Odtud $v = \dfrac{2s_z}{2t_z - \Delta t} = 13{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 48\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. **3 body**

**2.** a) Za předpokladu, že nádoba bude zcela ponořená na dně sudu, platí

$$V + S_0h_0 = Sh_1.$$

Z rovnice plyne

$$h_1 = \frac{V + S_0h_0}{S} = 0{,}70\ \mathrm{m}.$$

Jelikož $h_1 > h_0$, je předpoklad splněn. Vztlaková síla působící na zcela ponořenou nádobu má velikost

$$F_{vz} = \rho S_0h_0g = 1\,200\ \mathrm{N}.$$

Velikost tíhové síly působící na nádobu je

$$F_G = m_0g = 1\,800\ \mathrm{N}.$$

Jelikož $F_{vz} < F_G$, nádoba zůstane na dně sudu. **2 body**

b) V první fázi se napíná pružina do konečného prodloužení $\Delta y_1$, pro které platí

$$k\Delta y_1 = F_G - F_{vz}.$$

Z rovnice plyne

$$\Delta y_1 = \frac{F_G - F_{vz}}{k} = 0{,}15\ \mathrm{m}.$$

Doba napínání pružiny je

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta y_1}{v} = 3{,}0\ \mathrm{s}.$$

V druhé fázi již nádoba stoupá a beze změny deformace pružiny zvýší svoji polohu o hodnotu

$$\Delta y_2 = h_1 - h_0 = 0{,}10\ \mathrm{m}$$

působením síly stálé velikosti

$$F_2 = F_G - F_{vz} = 600\ \mathrm{N}.$$

Doba této fáze pohybu je

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta y_2}{v} = 2{,}0\ \mathrm{s}.$$

Ve třetí fázi se nádoba vynořuje. Během vynořování hladina vody klesne o hodnotu

$$\Delta h = h_1 - \frac{V}{S} = 0{,}40\ \mathrm{m}.$$

Současně se pružina prodlouží o délku

$$\Delta y_3 = \frac{F_{vz}}{k} = 0{,}30\ \mathrm{m}.$$

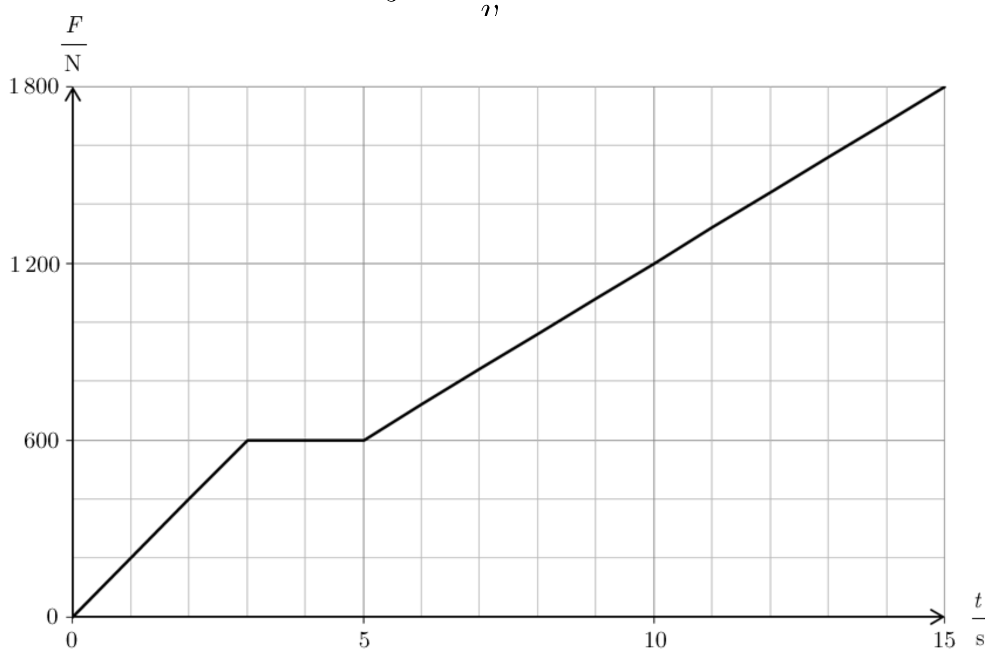
Lano tak povyjede o délku

$$\Delta y_3' = h_0 + \Delta y_3 - \Delta h = 0{,}50\ \mathrm{m}.$$

Doba této fáze pohybu je

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta y'_3}{v} = 10\ \mathrm{s}.$$

Graf:




**6 bodů**

Obr. R1

c) Práci vypočteme postupně pomocí síly a dráhy koncového bodu lana.

$$W = \frac{1}{2}F_2\Delta y_1 + F_2\Delta y_2 + \frac{F_2 + F_G}{2}\Delta y_3' = 45\ \mathrm{J} + 60\ \mathrm{J} + 600\ \mathrm{J} = 705\ \mathrm{J}.$$

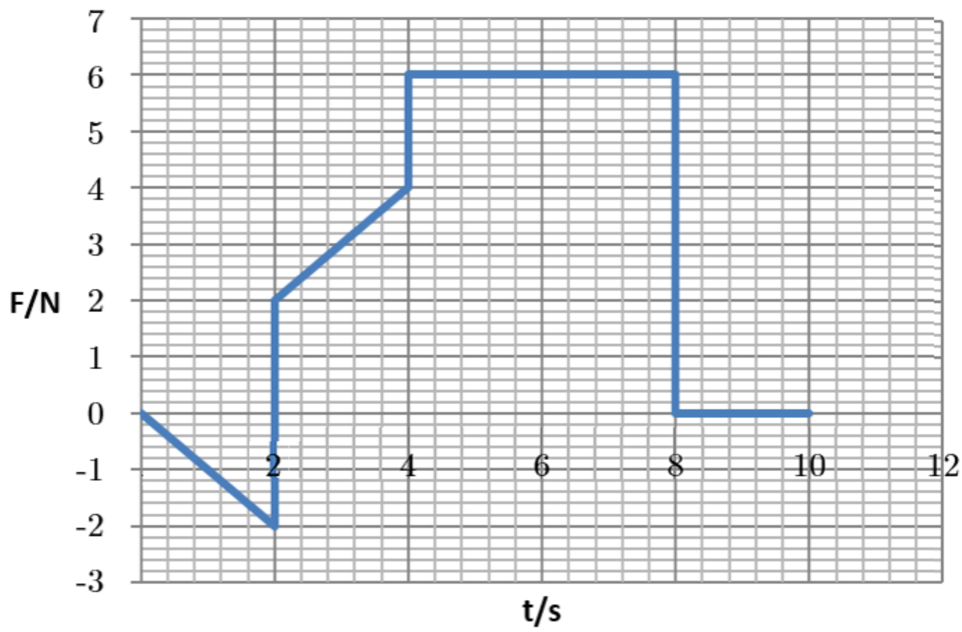
(Výpočet „kopíruje" obsah plochy pod grafem, kde místo času použijeme dráhu uraženou koncovým bodem lana.) **2 body**

*Alternativní řešení:* Práci vypočteme jako součet potenciální energie napnuté pružiny a práce potřebné ke zdvižení tělesa pomocí síly a jeho dráhy:

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta y_1 + \Delta y_3)^2 + F_2\Delta y_2 + \frac{F_2 + F_G}{2}(h_0 - \Delta h) =$$
$$= 405\ \mathrm{J} + 60\ \mathrm{J} + 240\ \mathrm{J} = 705\ \mathrm{J}.$$

**3.**a) Protože síla $F_2$ působí přes volnou kladku, má síla, která působí na hranol vpravo velikost $2F_2$.

Nakreslíme graf závislosti síly $F = F_1 - 2F_2$ na času:



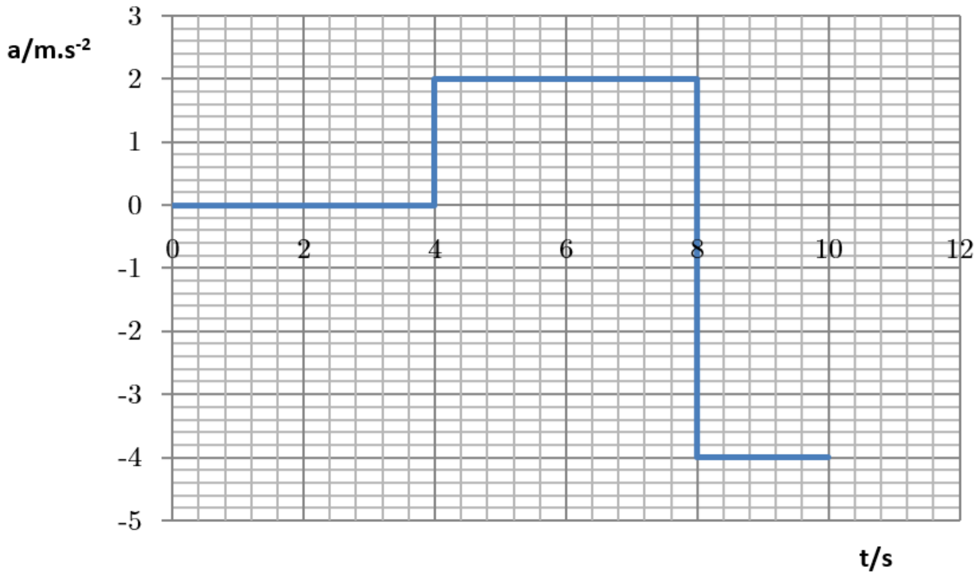

Obr. R2

Hranol se ale začne pohybovat, až když velikost síly $F$ bude větší než velikost síly tření $F_t = fmg = 4\ \mathrm{N}$, tedy začne se pohybovat až po 4 s se zrychlením

$$a_1 = \frac{F_1 - 2F_2 - fmg}{m} = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}};$$

po 8 s se hranol bude pohybovat rovnoměrně zpomaleně se zrychlením o velikosti $a_2 = fg = 4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ až do zastavení. **5 bodů**

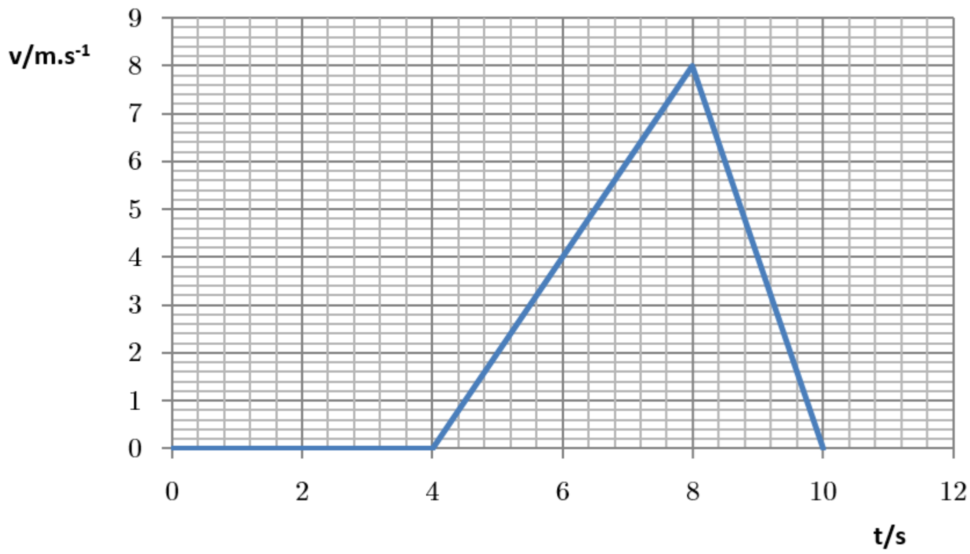
b) Graf závislosti zrychlení hranolu na čase za prvních 10 s:




Obr. R3

**2 body**

Sestrojíme rovněž závislost rychlosti na čase:




Obr. R4

Z grafu můžeme odečíst dráhu hranolu jako obsah plochy dvou trojúhelníků:

$$s = \frac{1}{2}v\Delta t_1 + \frac{1}{2}v\Delta t_2 = \frac{1}{2}v\left(\Delta t_1 + \Delta t_2\right) = 24\ \mathrm{m}.$$

**3 body**

**4.**a) Označme $\rho$ hustotu tělesa. Poměr hmotností spodního a horního válce je

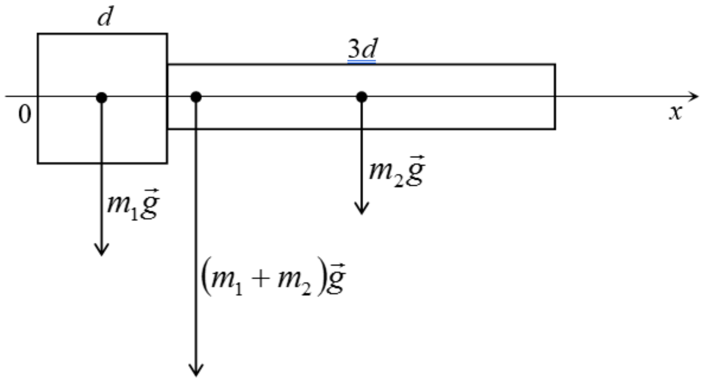
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho \cdot \pi \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 d}{\rho \cdot \pi \left(\dfrac{d}{4}\right)^2 3d} = \frac{4}{3}.$$

**2 body**

b) Na základě výsledku a) pro hmotnosti jednotlivých válců platí

$$m_1 = \frac{4}{7}M, \quad m_2 = \frac{3}{7}M$$

Označme $x$ osu tělesa s počátkem v dolní podstavě dolního válce. Podle momentové věty platí pro momenty sil vzhledem k vodorovné ose otáčení procházející počátkem a kolmé k ose $x$:




Obr. R5

$$(m_1 + m_2)\, g \cdot h_\mathrm{T} = m_1 g \cdot \frac{d}{2} + m_2 g \cdot \left(d + \frac{3}{2}d\right),$$

$$M \cdot h_\mathrm{T} = \frac{4}{7}M \cdot \frac{d}{2} + \frac{3}{7}M \cdot \frac{5}{2}d.$$

Z rovnice plyne $h_\mathrm{T} = \dfrac{19}{14}d$. **3 body**

c) Moment setrvačnosti tělesa je roven součtu momentů setrvačnosti každého válce:

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}M \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}M\left(\frac{d}{4}\right)^2 = \frac{1}{14}Md^2 + \frac{3}{224}Md^2 = \frac{19}{224}Md^2.$$

**2 body**

d) Nyní pro hmotnosti jednotlivých válců dostaneme:

$$m_1 = \rho\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 d, \quad m_2' = \rho\pi\left(\frac{d}{4}\right)^2 h_2.$$

Podle momentové věty platí pro momenty sil vzhledem k vodorovné ose procházející tentokrát společným středem stýkajících se podstav a kolmé k ose $x$:

$$m_1 g \cdot \frac{d}{2} = m_2' g \cdot \frac{h_2}{2},$$

$$\rho\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 d \cdot \frac{d}{2} = \rho\pi\left(\frac{d}{4}\right)^2 h_2 \cdot \frac{h_2}{2}.$$

Z rovnice plyne jeden kořen s fyzikálním významem $h_2 = 2d$. **3 body**

**5.**a) Vařič dodává teplo jednak čajníku, jednak vodě v něm. Tepelnou kapacitu čajníku označme $C_0$, tepelnou kapacitu vody označme $C$. Pro jednotlivé případy můžeme napsat

$$P\tau_1 = C_0\,(t_1 - t_0) + C\,(t_1 - t_0)\,,$$
$$P\tau_2 = C_0\,(t_2 - t_1) + \frac{C}{2}\,(t_2 - t_1)\,,$$
$$\frac{P}{2}\tau_3 = C_0\,(t_3 - t_2) + \frac{C}{4}\,(t_3 - t_2)\,.$$

Upravíme první dvě rovnice

$$C_0 + C = \frac{P\tau_1}{t_1 - t_0},$$
$$2C_0 + C = \frac{2P\tau_2}{t_2 - t_1}.$$

Z rovnic plyne

$$C_0 = \frac{2P\tau_2}{t_2 - t_1} - \frac{P\tau_1}{t_1 - t_0},$$
$$C = \frac{2P\tau_1}{t_1 - t_0} - \frac{2P\tau_2}{t_2 - t_1}.$$

Dosazením do třetí rovnice

$$\frac{P}{2}\tau_3 = \left[\frac{2P\tau_2}{t_2 - t_1} - \frac{P\tau_1}{t_1 - t_0}\right](t_3 - t_2) + \left[\frac{P\tau_1}{2\,(t_1 - t_0)} - \frac{P\tau_2}{2\,(t_2 - t_1)}\right](t_3 - t_2)\,,$$
$$\tau_3 = 2\,(t_3 - t_2)\left[\frac{2\tau_2}{t_2 - t_1} - \frac{\tau_1}{t_1 - t_0} + \frac{\tau_1}{2\,(t_1 - t_0)} - \frac{\tau_2}{2\,(t_2 - t_1)}\right] =$$
$$= 2\,(t_3 - t_2)\left[\frac{3\tau_2}{2\,(t_2 - t_1)} - \frac{\tau_1}{2\,(t_1 - t_0)}\right] = 2 \cdot 45 \cdot \left[\frac{1}{10} - \frac{1}{20}\right] \text{min} = 4{,}5\ \text{min}\,.$$

**4 body**

b) Z rovnice tepelné rovnováhy

$$P\tau_4 = C_0\,(t_3 - t_0) + C\,(t_3 - t_0) =$$
$$= (t_3 - t_0)\left[\frac{2P\tau_2}{t_2 - t_1} - \frac{P\tau_1}{t_1 - t_0} + \frac{2P\tau_1}{t_1 - t_0} - \frac{2P\tau_2}{t_2 - t_1}\right],$$

$$\tau_4 = (t_3 - t_0)\,\frac{\tau_1}{t_1 - t_0} = 8\ \text{min}\,.$$

**3 body**

c) K času $\tau_1$ připočítáme čas $\tau_5$:

$$P\tau_5 = C_0\,(t_3 - t_1) + \frac{C}{2}\,(t_3 - t_1) =$$
$$= (t_3 - t_1)\left[\frac{2P\tau_2}{t_2 - t_1} - \frac{P\tau_1}{t_1 - t_0} + \frac{P\tau_1}{t_1 - t_0} - \frac{P\tau_2}{t_2 - t_1}\right]$$
$$\tau_5 = (t_3 - t_1)\,\frac{\tau_2}{t_2 - t_1} = 4\ \text{min}\,.$$

Celková doba zahřívání vody k varu bude $\tau_1 + \tau_5 = 6$ min. **3 body**

**7.**a) Označme $t$ dobu letu druhého míčku do jejich srážky. Pro výšku setkání platí

$$H = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = H_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad H_0 = v_0 t. \tag{1}$$

Pro počáteční rychlost vrhu platí

$$v_0 = \sqrt{2gH_0}. \tag{2}$$

Pro dobu letu druhého míčku z nejvyšší polohy do srážky

$$H_0 - H = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2(H_0 - H)}{g}}. \tag{3}$$

Dosazením z rovnic (2) a (3) do rovnice (1)

$$H_0 = \sqrt{2gH_0}\sqrt{\frac{2(H_0 - H)}{g}} = \sqrt{4H_0^2 - 4H_0 H},$$

$$H_0 = 4H_0 - 4H \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{4}{3}H = 7{,}2\ \mathrm{m}.$$

**4 body**

b) Dosazením za $H_0$ do rovnice (2) $v_0 = \sqrt{2gH_0} = \sqrt{\frac{8}{3}gH} = 11{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Rychlost prvního míčku při srážce bude

$$v_1 = gt = \sqrt{2g(H_0 - H)} = \sqrt{\frac{2}{3}gH} = \frac{v_0}{2} = 5{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

rychlost druhého míčku bude

$$v_2 = v_0 - gt = \sqrt{\frac{8}{3}gH} - \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{gH}} = \sqrt{\frac{2}{3}gH} = v_1 = \frac{v_0}{2}.$$

**3 body**

c) První míček se bude po srážce pohybovat svisle vzhůru s počáteční rychlostí $\frac{v_0}{2}$, bude stoupat po dobu $T_1 = \frac{v_0}{2g} = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$ až do výšky $H_1 = \frac{v_0^2}{8g} = \frac{1}{3}H$ nad místem srážky, tedy do výšky $H_0$ nad místem odhodu. Do Honzovy ruky se odtud vrátí za dobu $T_2 = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{8H}{3g}}$. Doba letu prvního míčku tedy bude

$$t_1 = t + T_1 + T_2 = \sqrt{\frac{2(H_0 - H)}{g}} + \sqrt{\frac{2H}{3g}} + \sqrt{\frac{8H}{3g}} = \sqrt{\frac{2H}{3g}} + \sqrt{\frac{2H}{3g}} + 2\sqrt{\frac{2H}{3g}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{2H}{3g}} = 2{,}4\ \mathrm{s}\ \text{od vyhození druhého míčku.}$$

Druhý míček se vrátí za dobu $t_2 = t + t_3$, kde $t_3$ je doba trvání letu druhého míčku při pohybu směrem dolů. Pro tento pohyb (vrh svislý dolů) platí

$$H = \frac{v_0}{2}t_3 + \frac{1}{2}gt_3^2.$$

Odtud

$$t_3 = \frac{-\sqrt{\frac{8}{3}gH} + \sqrt{\frac{8}{3}gH + 8gH}}{2g} = \frac{-\sqrt{\frac{8}{3}gH} + \sqrt{\frac{32}{3}gH}}{2g} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{\frac{2}{3}gH} + 4\sqrt{\frac{2}{3}gH}}{2g} = \sqrt{\frac{2H}{3g}}.$$

Dosazením dostaneme $t_2 = t + t_3 = 2\sqrt{\frac{2H}{3g}} = 1{,}2\ \mathrm{s}$. **3 body**