Řešení úloh krajského kola 62. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autor úloh: J. Thomas

1. a) Protože samostatně jedoucí cyklista na dvojici vždy ve třetině vzdálenosti čeká, je průměrná rychlost dojíždějící dvojice $3v$ a celková doba cesty

$$t = \frac{s}{3v} = 3\ \mathrm{h}.$$

2 body

Poslední třetinu vzdálenosti urazil samostatně jedoucí cyklista za

$$t_s = \frac{\frac{s}{3}}{4v} = \frac{1}{12}\frac{s}{v} = \frac{3}{4}\ \mathrm{h}.$$

zatímco dvojici bude tato část cesty trvat

$$t_d = \frac{\frac{s}{3}}{3v} = \frac{1}{9}\frac{s}{v} = 1\ \mathrm{h}.$$

Samostatně jedoucí cyklista dorazí do cíle o 15 minut dříve. **2 body**

b) Úseky dráhy označme s_1 a s_2. Samostatně jedoucí cyklista ujede první úsek za dobu t_1, druhý úsek ujde za dobu t_3. Dvojice ujede první úsek za dobu t_2, druhý úsek za dobu t_4. Platí:

$$s = s_1 + s_2, s_1 = 4vt_1 = 3vt_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_2}{t_1} = \frac{4}{3} \tag{1}$$

a

$$s_2 = vt_3 = 4vt_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_3}{t_4} = 4. \tag{2}$$

Do cíle dorazí ve stejnou dobu, proto

$$t_1 + t_3 = t_2 + t_4. \tag{3}$$

Dosazením za s_1 a s_2 do vztahu pro dráhu

$$s = s_1 + s_2 = 4vt_1 + vt_3. \tag{4}$$

Dosazením z (1) a (2) do rovnice (3)

$$t_1 + t_3 = \frac{4}{3}t_1 + \frac{t_3}{4} \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{4}{9}t_1,$$

dosazením do (4)

$$4t_1 + t_3 = \frac{s}{v} = 4t_1 + \frac{4}{9}t_1 = \frac{40}{9}t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{9}{40}\frac{s}{v}.$$

Pak $t_3 = \frac{4}{9}t_1 = \frac{1}{10}\frac{s}{v}$.

Doba cesty samostatného cyklisty (a chodce) a tedy i dvojice cyklistů je

$$t_1 + t_3 = \frac{9}{40}\frac{s}{v} + \frac{1}{10}\frac{s}{v} = \frac{13}{40}\frac{s}{v} = \frac{117}{40}\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}\;55\,\mathrm{min}\;30\,\mathrm{s}.$$

Do cíle dorazí za 2 h 55,5 minuty. **4 body**

Protože

$$s_2 = vt_3 = v\frac{1}{10}\frac{s}{v} = \frac{1}{10}s = 4{,}5\ \mathrm{km},$$

musí kolo zanechat 4,5 km před cílem, tedy po ujetí 40,5 km. **2 body**

2. a) Nosník musíme podepřít nad jeho těžištěm. Těžiště nosníku leží na svislé přímce, která je od bodu A ve vzdálenosti

$$x = \frac{\frac{2}{3}M \cdot \frac{L}{3} + \frac{1}{3}M \cdot \frac{2L}{3}}{M} = \frac{4}{9}L = \frac{16}{3}\ \mathrm{m} = 5{,}3\ \mathrm{m}.$$

3 body

b) Podepřeme-li nosník uprostřed vzdálenosti AB, bude se těžiště jeho pravé části nacházet ve vzdálenosti x_2 od osy otáčení. Platí

$$x_2 = \frac{\frac{1}{3}M \cdot \frac{L}{6} + \frac{1}{3}M \cdot \frac{L}{3}}{\frac{2}{3}M} = \frac{L}{4} = 3\ \mathrm{m}.$$

Těžiště jeho levé části je ve vzdálenosti $x_1 = \dfrac{L}{6} = 2$ m od osy otáčení. Z momentové věty plyne

$$m_1\frac{L}{3} + \frac{1}{3}Mx_1 = \frac{2}{3}Mx_2,$$

odtud $m_1 = \dfrac{1}{3}M$.

Jednodušší řešení: Na pravé straně části nosníku AB je břemenem jeho část o hmotnosti $\dfrac{1}{3}M$, na levé straně nosníku musí být zavěšeno břemeno stejné hmotnosti. **3 body**

c) Moment sil, působících na levé straně nosníku má nyní velikost

$$M_L = 4Mg\frac{L}{6} + \frac{Mg}{6}\frac{L}{12} = \frac{49}{72}MgL.$$

Moment tíhových sil na pravé straně

$$M_P = \frac{Mg}{2}.\frac{L}{4} + \frac{Mg}{3}\frac{L}{2} = \frac{7}{24}MgL = \frac{21}{72}MgL.$$

Aby byla velikost síly F minimální, musí být maximální její vzdálenost od osy otáčení. Vzdálenost bodu C od osy otáčení je

$$\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{3}\right)^2} = \frac{L}{6}\sqrt{13}.$$

Moment síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení bude

$$M_P = F\frac{L}{6}\sqrt{13}.$$

Z rovnosti momentů

$$\mathrm{F}\frac{L}{6}\sqrt{13} = \frac{49}{72}MgL - \frac{21}{72}MgL = \frac{7}{18}MgL \quad \Rightarrow \quad F = \frac{7}{3\sqrt{13}}Mg = 0{,}65\ Mg.$$

Tato síla působí kolmo na úsečku OC, svírá tedy se svislým směrem úhel α, pro který platí

$$tg\alpha = \frac{\frac{L}{3}}{\frac{L}{2}} = \frac{2}{3},\ \alpha = 34°.$$

4 body

3. a) Je-li výsledná teplota v kalorimetru 0 °C, musí být přidáno nejméně tolik ledu ($m_{\min}$), aby se voda ochladila na 0 °C a všechen led přitom roztál a nejvíce ($m_{\max}$) tolik ledu, aby se voda ochladila na 0 °C a ztuhla na led. V prvním případě bude platit:

$$m_{\min}c_2\left(t_0 - t_2\right) + m_{\min}l_t = m_1c_1\left(t_1 - t_0\right) \ \Rightarrow\ m_{\min} = \frac{m_1c_1\left(t_1 - t_0\right)}{c_2\left(t_0 - t_2\right) + l_t} = 0{,}113 \text{ kg}.$$

2 body

V druhém případě bude platit:

$$m_{\max}c_2\left(t_0 - t_2\right) = m_1c_1\left(t_1 - t_0\right) + m_1l_t \Rightarrow m_{\max} = \frac{m_1c_1\left(t_1 - t_0\right) + m_1l_t}{c_2\left(t_0 - t_2\right)} = 2{,}57 \text{ kg}.$$

Do kalorimetru tedy mohlo být přidáno od 0,113 kg do 2,57 kg ledu.

2 body

b) Pokud byla v kalorimetru pouze voda o teplotě $t_0 = 0$ °C, bylo jí $m_1 + m_{\min} = 0{,}313$ kg. Přidáním závaží se voda ohřeje na teplotu

$$t = \frac{\left(m_1 + m_{\min}\right)c_1t_0 + m_3c_3t_3}{\left(m_1 + m_{\min}\right)c_1 + m_3c_3} = \frac{1,0.450.100}{0,313.4200 + 1,0.450}°C = 25{,}5\ °\text{C}.$$

2 body

Pokud je v soustavě i led, může ho přidáním zahřátého závaží roztát nejvýše $m = \frac{m_3c_3t_3}{l_t} = 0{,}136$ kg. V soustavě pak bude 0,249 kg vody a zbytek bude tvořit led o teplotě 0 °C.

Pokud bylo do kalorimetru přidáno od 0,113 kg do 2,57 kg ledu, bude po přidání závaží v kalorimetru pouze voda s teplotou v intervalu $t \in (0\ °\text{C}; 25,5\ °\text{C})$.

2 body

Pokud bylo do kalorimetru přidáno více než 2,57 kg ledu, zůstane i po přidání závaží v soustavě směs ledu a vody o teplotě 0 °C. **2 body**

4.a,b Míček dopadl do vzdálenosti

$$x_2 = u_2\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad u_2 = x_2\sqrt{\frac{g}{2h}} = 17{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

Podle zákona zachování hybnosti určíme rychlost střely po průletu míčkem
$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_2 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{m_1v_1 - m_2u_2}{m_1} = \frac{m_1v_1 - m_2x_2\sqrt{\frac{g}{2h}}}{m_1} = 150\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Střela pak dopadne do vzdálenosti $x_1 = u_1\sqrt{\frac{2h}{g}} = 214\ \mathrm{m}.$ **3 body**

a) Podle zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + Q.$$

Na teplo se přeměnilo

$$p = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_2u_2^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2} = 0{,}89 = 89\ \%$$

kinetické energie střely. **3 body**

b) Podle ZZH bude

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)\,u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2},$$

$$x_3 = u\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 34{,}0\ \mathrm{m}.$$

2 body