Řešení úloh 1. kola 62. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autor úloh: J. Jírů

1.a) Pro rozjíždění rovnoměrně zrychleným pohybem platí:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2,$$

$$v_1 = at_1.$$

Dobu rozjíždění získáme vyloučením zrychlení:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1}{t_1} \cdot t_1^2 = \frac{1}{2}v_1 t_1.$$

Z rovnice plyne

$$t_1 = \frac{2s_1}{v_1} = \frac{2 \cdot 450}{\frac{65}{3{,}6}}\ \mathrm{s} = 50\ \mathrm{s}.$$

Velikost zrychlení je

$$a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_1}{\frac{2s_1}{v_1}} = \frac{v_1^2}{2s_1} = \frac{\left(\frac{65}{3{,}6}\right)^2}{2 \cdot 450}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}36\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

4 body

b) U rovnoměrně zpomaleného pohybu je počáteční rychlost rovna konečné rychlosti rovnoměrně zrychleného pohybu a na stejné dráze musí být též stejné zrychlení a stejný čas. Během celé jízdy se vlak 8krát rozjíždí, 8krát brzdí a 7krát na zastávkách stojí. Celková dráha ujetá rovnoměrným pohybem je

$$s' = s - 16s_1$$

a doba jízdy rovnoměrným pohybem

$$t' = \frac{s'}{v_1} = \frac{s - 16s_1}{v_1}.$$

Celková doba jízdy pak je

$$t = 16t_1 + t' + 7\Delta t = 16 \cdot \frac{2s_1}{v_1} + \frac{s - 16s_1}{v_1} + 7\Delta t = \frac{s + 16s_1}{v_1} + 7\Delta t =$$

$$= \frac{43\,200 + 16 \cdot 450}{\frac{65}{3{,}6}}\ \mathrm{s} + 7 \cdot 75\ \mathrm{s} = 3\,316\ \mathrm{s} = 55\ \mathrm{min}.$$

4 body

Průměrná rychlost vlaku je

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{s}{t} = \frac{43{,}2}{\frac{3\,316}{3\,600}}\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 47\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

2 body

2.a) Při jedné otočce pedálů spojených s ozubeným talířem vykoná zadní ozubené kolečko společně se zadním kolem N_1/n_1 otáček. Při frekvenci šlapání f_1 tak bude frekvence otáčení zadního kola

$$f_1' = \frac{N_1}{n_1} f_1.$$

a cyklista se bude pohybovat rychlostí

$$v_1 = \frac{d}{2}\cdot 2\pi f_1' = \pi d \frac{N_1}{n_1} f_1 = 0,65\pi \cdot \frac{36}{17}\cdot 1{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 5{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4 body

b) Za čas t_1 ujede dráhu

$$s = v_1 t_1 = \pi d \frac{N_1}{n_1} f_1 t_1.$$

Obdobně pro cestu zpět platí

$$s = v_2 t_2 = \pi d \frac{N_2}{n_2} f_2 t_2.$$

Z rovnosti dostaneme

$$f_2 = \frac{N_1 n_2}{n_1 N_2}\frac{t_1}{t_2} f_1 = \frac{36\cdot 12\cdot 9}{17\cdot 42\cdot 7}\cdot 1{,}2\ \mathrm{Hz} = 0{,}93\ \mathrm{Hz}.$$

3 body

c) Průměrná rychlost je

$$v_p = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2\pi d N_1 f_1 t_1}{n_1\,(t_1+t_2)} = \frac{2\pi\cdot 0,65\cdot 36\cdot 1,2\cdot 540}{17\cdot(540+420)}\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 5{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body

3.a) Označme α sklon nakloněné roviny a l její délku. Na nakloněné rovině působí ve směru pohybu složka tíhové síly $F_1 = mg\sin\alpha$ a ve směru opačném třecí síla $F_{\mathrm{t}1} = fmg\cos\alpha$. Kvádr se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením

$$a_1 = \frac{F_1 - F_{\mathrm{t}1}}{m} = \frac{mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha}{m} = g\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g\left(\frac{h}{l} - f\frac{d}{l}\right).$$

Zrychlení kvádru při rovnoměrně zpomaleném pohybu na vodorovné podlaze je

$$a_2 = \frac{F_{t2}}{m} = \frac{fmg}{m} = fg.$$

Z rovnic $v = a_1 t$, $l = \frac{1}{2}a_1 t^2$ rovnoměrně zrychleného pohybu pro konečnou rychlost plyne

$$v = \sqrt{2a_1 l} = \sqrt{2g\left(\frac{h}{l} - f\frac{d}{l}\right)l} = \sqrt{2g\,(h - fd)}.$$

Obdobně pro stejně velkou počáteční rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu dostaneme

$$v = \sqrt{2a_2 s} = \sqrt{2fgs}.$$

Z rovnosti plyne

$$f = \frac{h}{d+s} = \frac{1}{3}.$$

5 bodů

b) Hledaná práce je

$$W = F_{t2}s + (F_{t1} + F_1)\,l = fmgs + (fmg\cos\alpha + mg\sin\alpha)\,l =$$
$$= mg\,(fs + fl\cos\alpha + l\sin\alpha) = mg\left(\frac{h}{d+s}s + \frac{h}{d+s}l\frac{d}{l} + l\frac{h}{l}\right) =$$
$$= 2mgh = 410\ \mathrm{J}.$$

2 body

c) Z výsledku úlohy b) plyne $k = 2$. Na počátku má kvádr na rampě vzhledem k podlaze potenciální energii $E_p = mgh$. Při pohybu kvádru dolů a po vodorovné rovině třecí síla způsobí jeho zastavení, čímž vykoná práci $W' = mgh$ rovnou jeho původní potenciální energii. Při tlačení kvádru nahoru působí vnější síla proti síle tření, čímž vykoná stejnou práci $W_1 = mgh$, a navíc zvětší potenciální energii kvádru, čímž vykoná další práci $W_2 = mgh$. Celková vykonaná práce je $W = W_1 + W_2 = 2mgh$, a tedy $k = 2$. **2 body**

4.a) Uvažovaný výkon se využívá pouze na kinetickou energii E_k pohybu. Označíme-li m hmotnost tramvaje, pak pohybový výkon je

$$P = \frac{E_k}{t_1} = \frac{mv_1^2}{2t_1}. \tag{1}$$

Obdobně v čase t_2 platí

$$P = \frac{mv_2^2}{2t_2}. \tag{2}$$

Z rovnosti dostaneme

$$v_2 = v_1\sqrt{\frac{t_2}{t_1}} = 7{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

b) Také v hledaném čase t_3 platí

$$P = \frac{mv_3^2}{2t_3}. \tag{3}$$

Z rovnosti pravých stran vztahů (1) a (3) dostaneme

$$t_3 = t_1\frac{v_3^2}{v_1^2} = 23\ \mathrm{s}.$$

2 body

c) Při stálém výkonu během rozjíždění podle vzorce $P = Fv$ s rostoucí okamžitou rychlostí klesá okamžitá tahová síla a s ní podle 2. Newtonova pohybového zákona $F = ma$ klesá i okamžité zrychlení. Ze vzorců plyne

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P}{mv}.$$

V čase t_1 je

$$a_1 = \frac{P}{mv_1} = \frac{\frac{mv_1^2}{2t_1}}{mv_1} = \frac{v_1}{2t_1} = 0{,}63\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

V čase t_2 je

$$a_2 = \frac{v_2}{2t_2} = \frac{v_1\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}}{2t_2} = \frac{v_1}{2\sqrt{t_1t_2}} = 0{,}42\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

V čase t_3

$$a_3 = \frac{v_3}{2t_3} = \frac{v_3}{2\frac{v_3^2}{v_1^2}t_1} = \frac{v_1^2}{2v_3t_1} = 0{,}26\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

6 bodů

Poznámka: Z řešení plyne, že pohyb se stálým výkonem urychlující síly není pohybem rovnoměrně zrychleným, neboť podle odvozeného vzorce

$$a = \frac{P}{mv}$$

okamžité zrychlení klesá nepřímo úměrně s rostoucí rychlostí.
Přirozeně vznikne otázka, jaké je okamžité zrychlení v nulovém čase, kterým jsme se v úloze nezabývali. Podle uvedeného vzorce vychází nekonečně velké, a to pak

musí být způsobeno nekonečně velkou pohybovou silou. Ve skutečnosti výkon v prvních okamžicích rozjíždění nenaběhne okamžitě na svoji konečnou konstantní hodnotu, stejně tak postupný přenos síly z motoru na kola není okamžitý díky vůli a deformacím materiálu při záběru. Navíc při nejkratším možném náběhu na maximální výkon by v prvních okamžicích došlo k prokluzování kol jako při startu závodních motorových vozidel, kde je účelem vystartovat co nejrychleji. Proto při skutečném rozjezdu vozidel v běžném provozu je doba náběhu výkonu na maximum účelově ještě delší. Uvedené faktory jsme při řešení úlohy zanedbali.

5.a) Označme v_0' velikost rychlosti, při níž by se kulička v nejvyšší poloze zastavila. Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$\frac{1}{2}mv_0'^2 = mg \cdot 2l$$

plyne

$$v_0' = \sqrt{4gl} = 3{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Aby se tyčka s kuličkou otáčely, musí být splněna podmínka $v_0 > v_0'$.

2 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg \cdot 2l + \frac{1}{2}mv_2^2$$

plyne

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4gl} = 1{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

c) V nejnižší poloze působí kulička na tyč tíhou $m\boldsymbol{g}$ a setrvačnou odstředivou silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s1}} = m\frac{v_1^2}{l}$ stejného směru svisle dolů. Kulička tyčku napíná silou o velikosti

$$F_1 = mg + F_{\mathrm{s1}} = mg + m\frac{v_1^2}{l} = m\left(g + \frac{v_1^2}{l}\right) = 8{,}3\ \mathrm{N}.$$

2 body

V nejvyšší poloze působí kulička na tyč tíhou $m\boldsymbol{g}$ ve směru dolů a setrvačnou odstředivou silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s2}}$ ve směru nahoru. Velikost setrvačné síly je

$$F_{\mathrm{s2}} = m\frac{v_2^2}{l} = m\frac{v_1^2 - 4gl}{l} = m\left(\frac{v_1^2}{l} - 4g\right).$$

Výslednice má velikost

$$F_2 = |mg - F_{s2}| = \left|mg - m\left(\frac{v_1^2}{l} - 4g\right)\right| = m\left|5g - \frac{v_1^2}{l}\right| = 0{,}51\ \mathrm{N}.$$

Jelikož v číselném dosazení je výraz v absolutní hodnotě kladný, pak $mg > F_{s2}$, výslednice $\boldsymbol{F}_2$ směřuje dolů a tyčka je stlačována. **2 body**

d) Označme v'_2 velikost rychlosti, při níž je splněna podmínka nulové síly působící na tyčku. Pak platí

$$mg = m\frac{{v'}_2^2}{l}$$

neboli

$${v'}_2^2 = gl.$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$\frac{1}{2}m{v'}_1^2 = mg \cdot 2l + \frac{1}{2}m{v'}_2^2.$$

Z rovnice dostaneme

$$v'_1 = \sqrt{4gl + {v'}_2^2} = \sqrt{4gl + gl} = \sqrt{5gl} = 3{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

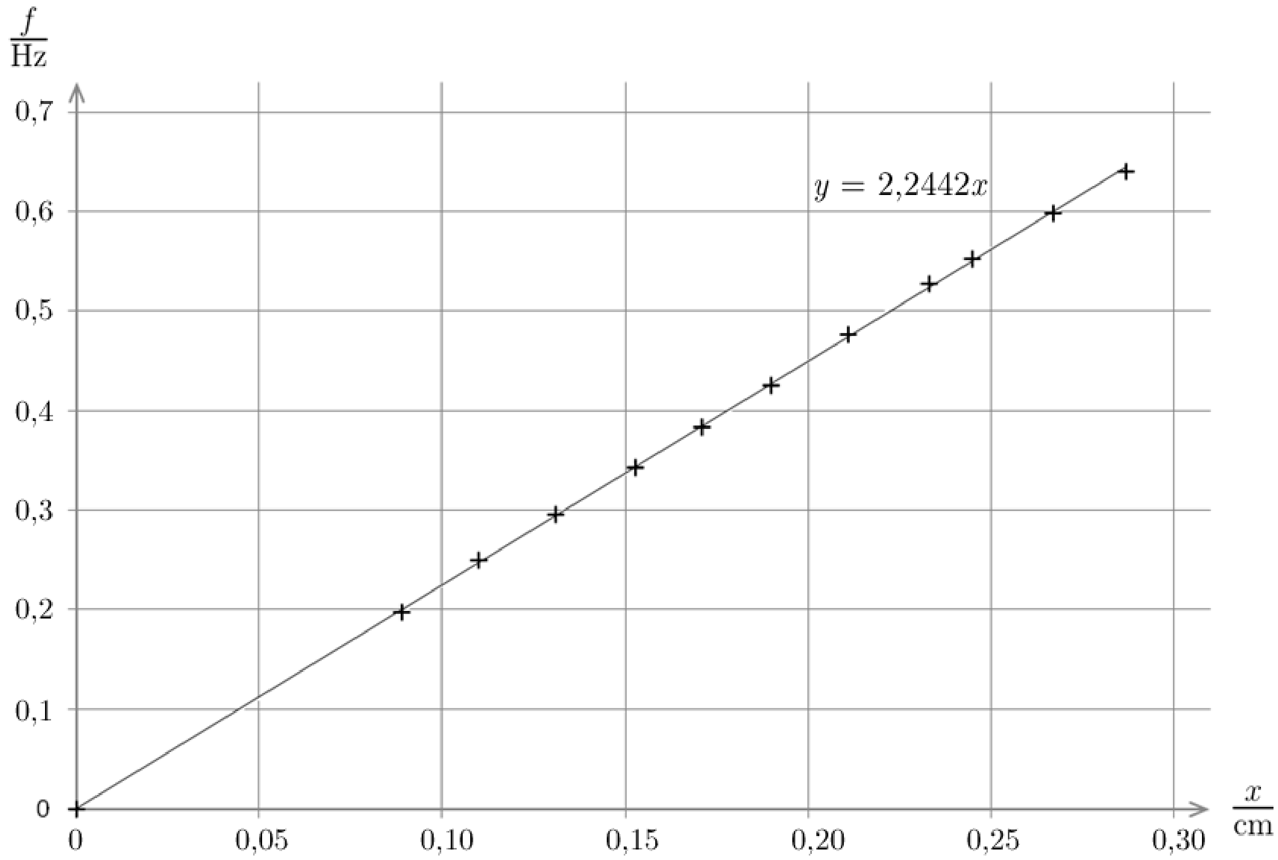
6. Příklady naměřených hodnot:

Výsledky měření pro závitovou tyč o průměru 8 mm: $d = 0{,}287$ m, $l = 1{,}81$ m.

Číslo měření	$\frac{x}{\mathrm{cm}}$	$\frac{10T_1}{\mathrm{s}}$	$\frac{10T_2}{\mathrm{s}}$	$\frac{\overline{T}}{\mathrm{s}}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$
1	28,7	15,73	15,54	1,56	0,640
2	26,7	16,81	16,67	1,67	0,597
3	24,5	18,11	18,13	1,81	0,552
4	23,3	19,07	18,87	1,90	0,527
5	21,1	21,00	21,03	2,10	0,476
6	19,0	23,49	23,52	2,35	0,425
7	17,1	26,10	26,07	2,61	0,383
8	15,3	29,38	29,10	2,92	0,342
9	13,1	33,80	33,95	3,39	0,295
10	11,1	39,92	40,22	4,01	0,250
11	8,90	50,83	50,47	5,07	0,197
12	0	∞	∞	∞	0

Typ spojnice trendu zvolen lineární a procházející počátkem. Zobrazena rovnice přímé úměrnosti $y = Ax = 2{,}2442\ \mathrm{m^{-1} \cdot s} \cdot x$, $\{y\} = 2{,}2442\,\{x\}$.

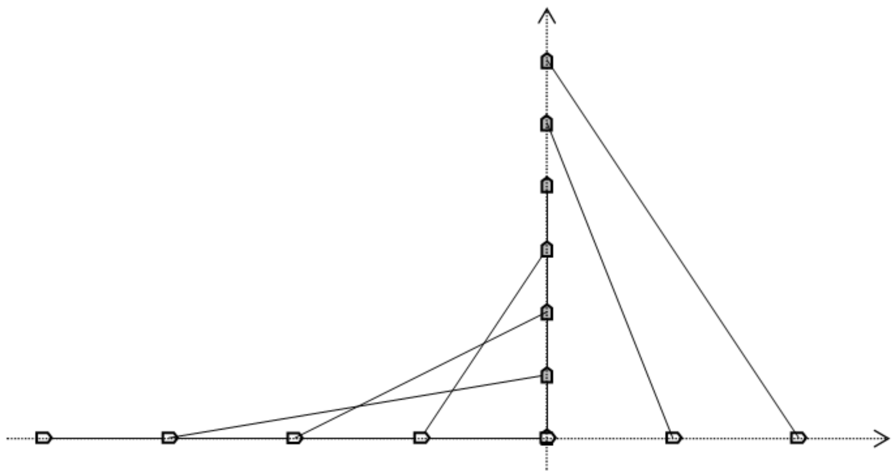
$$A' = \frac{1}{2\pi d}\sqrt{\frac{3g}{l}} = \frac{1}{2\pi \cdot 0{,}287}\sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}81}{1{,}81}} = 2{,}236\ \mathrm{m^{-1} \cdot s} \cong 2{,}24\ \mathrm{m^{-1} \cdot s}.$$



Obr. R1

Závěr: Výsledek měření je v souladu s teoretickým předpokladem. Frekvence kmitů závisí přímo úměrně na vzdálenosti závěsů. Konstanta úměrnosti zjištěná z měření kmitů se s přesností na 3 platné číslice shoduje s hodnotou vypočtenou z teoretického vzorce (u třetí platné číslice lze připustit nesoulad o jednotku).

7.a) Zvolíme vhodné měřítko a v něm sestrojíme polohy člunů se spojnicemi.



Obr. R2

Vzdálenosti mezi čluny vypočteme podle Pythagorovy věty, kterou lze pro libovolný čas zapsat ve tvaru

$$d = \sqrt{(d_0 - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2}.$$

Vypočtené vzdálenosti v požadovaných časech jsou v tabulce:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	10	20	30	40	50	60
$\frac{d}{\mathrm{m}}$	320	243	179	144	160	215	288

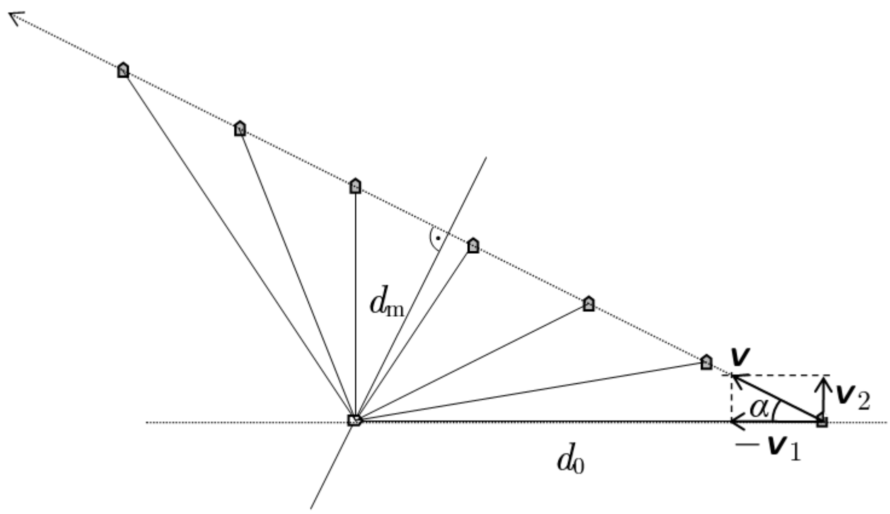
Z vypočtených vzdáleností je nejmenší vzdálenost 144 m, ale nelze tvrdit, že to je vzdálenost při největším přiblížení člunů. **3 body**

b) K sestrojení poloh vypočteme úhel (přesnější údaj je pro další užití ve výpočtech)

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_2}{v_1} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 26{,}57° \cong 27°$$

a dráhu Δs uraženou vždy za dobu $\Delta t = 10$ s pohybu

$$\Delta s = v\Delta t = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \Delta t = 89{,}4 \text{ m}.$$



Obr. R3

V obrázku R2 z místa pozorovatele (první člun) vedeme kolmici k trajektorii druhého člunu a ze vzniklého pravoúhlého trojúhelníku vypočteme hledanou minimální vzdálenost člunů

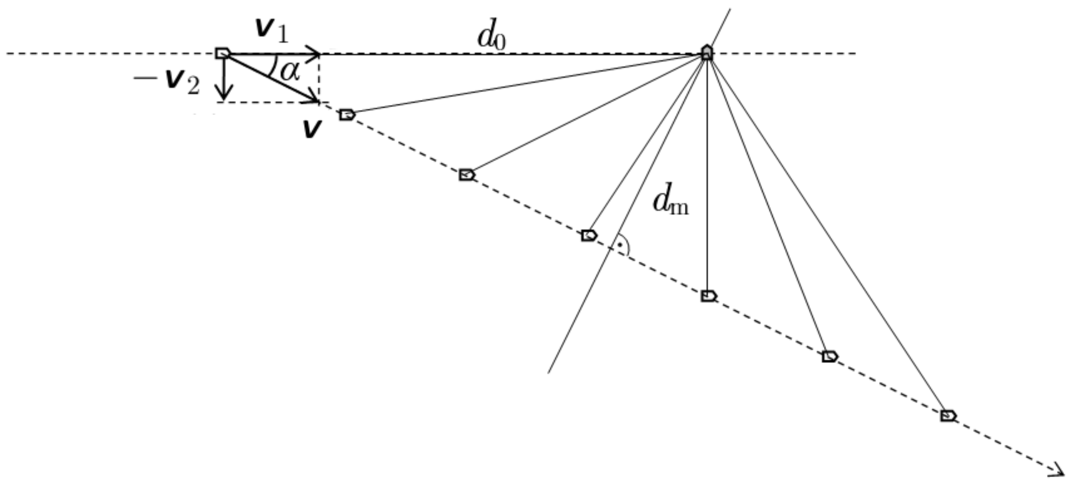
$$\sin\alpha = \frac{d_\mathrm{m}}{d_0} \quad \Rightarrow \quad d_\mathrm{m} = d_0 \sin\alpha = 143 \text{ m}.$$

4 body

c) K sestrojení poloh vypočtené hodnoty jsou stejné, pouze se mění směry všech rychlostí na opačné:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_2}{v_1} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 26{,}57° \cong 27°,$$

$$\Delta s' = v'\Delta t = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \Delta t = 89{,}4 \text{ m}.$$



Obr. R4

V obrázku z místa pozorovatele (druhý člun) vedeme kolmici k trajektorii prvního člunu a ze vzniklého pravoúhlého trojúhelníku vypočteme hledanou minimální vzdálenost člunů

$$\sin\alpha' = \frac{d_\mathrm{m}}{d_0} \quad \Rightarrow \quad d_\mathrm{m} = d_0 \sin\alpha' = 143\ \mathrm{m}.$$