Řešení úloh krajského kola 62. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů

1. a) Dobu rozjíždění prvního motocyklu dostaneme ze vztahu

$$s = \frac{1}{2}at^2,$$

z něhož plyne

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{2}}\,\mathrm{s} = 10\ \mathrm{s}.$$

Jeho konečnou rychlost určíme ze vztahu

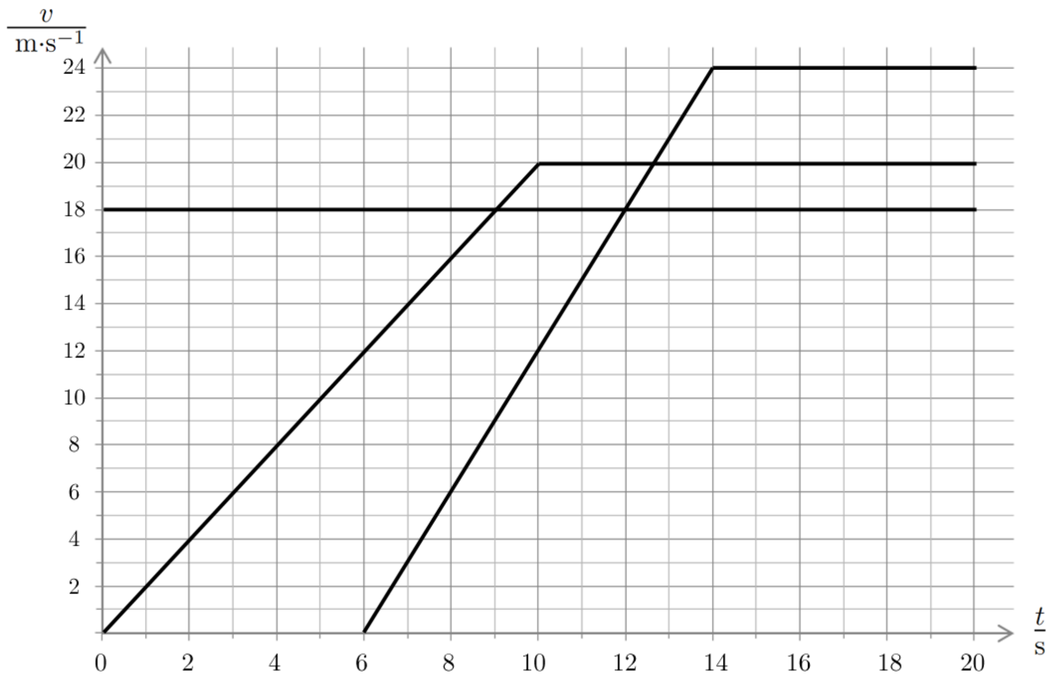
$$v = at = 2 \cdot 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Užitím téhož vztahu dostaneme i konečnou rychlost druhého motocyklu.

$$v = at = 3 \cdot 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

Sestrojíme graf



Obr. R1

3 body

b) Označme pro automobil $v_0 = 18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ rychlost rovnoměrného pohybu, dále po řadě pro první a druhý motocykl rychlosti rovnoměrného pohybu $v_1 = 20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_2 = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, časy začátku rovnoměrného pohybu $t_1 = 10$ s, $t_2 = 14$ s a dráhy ujeté během rozjíždění $s_1 = 100$ m, $s_2 = \dfrac{24\mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 8\ \mathrm{s}}{2} = 96$ m (obsah plochy pod grafem). **1 bod**

Během rovnoměrného pohybu je pak funkční závislost dráhy na čase dána vztahy

$s_a = v_0 t$ $\qquad \{s_a\} = 18\{t\}$

$s_{m1} = s_1 + v_1(t - t_1)$ $\qquad \{s_{m1}\} = 100 + 20(\{t\} - 10)$

$s_{m2} = s_2 + v_2(t - t_2)$ $\qquad \{s_{m2}\} = 96 + 24(\{t\} - 14)$

Hledáme časy, v nichž nastane rovnost ujetých drah ve všech kombinacích dvojic vozidel.

Z rovnice $s_a = s_{m1}$ dostaneme čas 50 s, kdy první motocykl předjíždí automobil.
Z rovnice $s_a = s_{m2}$ dostaneme čas 40 s, kdy druhý motocykl předjíždí automobil.
Z rovnice $s_{m1} = s_{m2}$ dostaneme čas 35 s, kdy druhý motocykl předjíždí první motocykl. **3 body**

c) Podle časů předjetí jede v čele druhý motocykl a poslední jede automobil. Vzdálenost d mezi nimi v čase $t = 60$ s je

$$d = s_{m2} - s_a = s_2 + v_2(t - t_2) - v_0 t = (96 + 24(60 - 14) - 18 \cdot 60)\,\mathrm{m} = 120\ \mathrm{m}$$

1 bod

2. a) Užitečný výkon elektromotoru určíme vztahem $P = Fv$, kde

$$F = \frac{r}{R} mg$$

je tahová síla, kterou působí hnací kolo na lano a

$$v = \pi d f$$

obvodová rychlost hnacího kola.

Dosazením dostaneme

$$P = Fv = \pi d f \frac{r}{R} mg = \pi \cdot 0{,}06 \cdot 4{,}5 \cdot \frac{5}{26} \cdot 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{W} = 130\ \mathrm{W}.$$

3 body

b) Počet otáček velkého kola lze vyjádřit

$$N = \frac{h}{2\pi r} = \frac{l}{2\pi R},$$

kde l je délka lana svinutého z kola nebo též délka lana navinutého na hnací kolo elektromotoru. Ze vztahu plyne

$$l = \frac{R}{r} h.$$

Doba pohybu břemene pak je

$$t = \frac{l}{v} = \frac{\frac{R}{r} h}{\pi d f} = \frac{R}{r} \frac{h}{\pi d f} = \frac{26}{5} \cdot \frac{7{,}5}{\pi \cdot 0{,}06 \cdot 4{,}5}\ \mathrm{s} = 46\ \mathrm{s}.$$

3 body

c) Perioda otáčení kola na hřídeli je

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\pi d f} = \frac{2R}{df} = \frac{2R}{d} \cdot \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot 26}{6} \cdot \frac{1}{4{,}5}\mathrm{s} = 1{,}9\ \mathrm{s}.$$ **2 body**

d) Lano na obvodu velkého kola a lano na obvodu hřídele má stejnou úhlovou rychlost, označme ji ω. Z porovnání $r\omega^2 < R\omega^2$ plyne, že větší dostředivé zrychlení je na velkém kole.

Lano na obvodu velkého kola a hnacího kola má stejnou obvodovou rychlost v. Z porovnání $\frac{v^2}{R} < \frac{v^2}{\frac{d}{2}} = \frac{2v^2}{d}$ plyne, že dostředivé zrychlení na obvodu hnacího kola je ještě větší. Jeho hodnota je

$$a_\mathrm{d} = \frac{2v^2}{d} = \frac{2\pi^2 d^2 f^2}{d} = 2\pi^2 d f^2 = 2\pi^2 \cdot 0{,}06 \cdot 4{,}5^2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

2 body

3. a) Kinetická energie automobilu je rovna práci vykonané brzdící silou:

$$E_\mathrm{k} = Fs = 510\ \mathrm{kJ}.$$

2 body

Alternativní řešení: Užijeme vztah pro kinetickou energii a postupně dostaneme:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{a} \cdot (at)^2 = F \cdot \frac{1}{2}at^2 = Fs.$$

b) Z dráhy rovnoměrně zpomaleného pohybu do úplného zastavení

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

plyne pro velikost zrychlení

$$a = \frac{2s}{t^2}. \qquad (1)$$

Z druhého Newtonova pohybového zákona pak dostaneme

$$m = \frac{F}{a} = \frac{F}{\frac{2s}{t^2}} = \frac{Ft^2}{2s} = 1\,600\ \mathrm{kg}.$$

3 body

c) Hledaná dráha je rozdíl celkové brzdné dráhy a dráhy ujeté v posledních dvou třetinách doby brzdění:

$$s_1 = s - \frac{1}{2}a\left(\frac{2}{3}t\right)^2 = s - \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{t^2} \cdot \frac{4}{9}t^2 = s - \frac{4}{9}s = \frac{5}{9}s = 83\ \mathrm{m}.$$

3 body

Alternativní řešení: Užijeme vzorec pro dráhu rovnoměrně zpomaleného pohybu v čase $\frac{t}{3}$:

$$s_1 = v\frac{t}{3} - \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{3}\right)^2 = at \cdot \frac{t}{3} - \frac{1}{2}a\frac{t^2}{9} = \frac{2s}{t^2} \cdot \frac{t^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{t^2} \cdot \frac{t^2}{9} = \frac{2}{3}s - \frac{1}{9}s = \frac{5}{9}s.$$

d) Při rovnoměrně zpomaleném pohybu rychlost klesá rovnoměrně s časem. To znamená, že rychlost bude třetinová v okamžiku, kdy do zastavení bude zbývat třetina času, tj. od začátku brzdění uplyne čas

$$t_2 = \frac{2}{3}t = 8{,}0 \text{ s}.$$

2 body

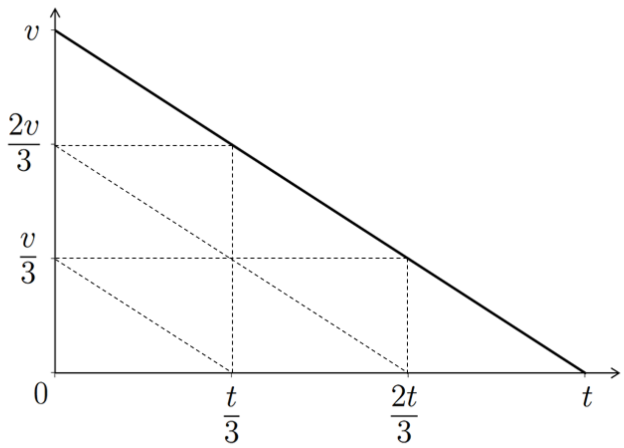
Alternativní řešení: Užijeme vztah pro rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu v čase $\frac{t}{3}$:

$$\frac{v}{3} = v - at_1 = v - \frac{v}{t}t_1.$$

Z rovnosti prvního a třetího výrazu dostaneme

$$t_1 = \frac{2}{3}t.$$

Poznámka: Úlohy c) a d) je možné vyřešit užitím grafu. Obsah plochy pod grafem na časovém intervalu $\left\langle 0; \frac{t}{3} \right\rangle$ tvoří $\frac{5}{9}$ celkového obsahu plochy pod grafem. Funkční hodnota v čase $\frac{2}{3}t$ je $\frac{v}{3}$.



Obr. R2

4. a) Pohyb člunu vzhledem k souřadnicovému systému Oxy se skládá z pohybu rovnoměrného ve směru osy x (ve směru toku řeky) rychlostí o velikosti v_0 a z pohybu rovnoměrně zrychleného a poté rovnoměrně zpomaleného ve směru osy y. Označíme-li $x_0 = 160$ m, je hledaný čas

$$t_0 = \frac{x_0}{v_0} = \frac{160}{2}\text{s} = 80 \text{ s}.$$

1 bod

b) Pro rovnoměrně zrychlený pohyb člunu ve směru osy y platí

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{t_0}{2}\right)^2.$$

Z rovnice plyne

$$a = \frac{4d}{t_0^2} = \frac{4 \cdot 240}{80^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0{,}15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

2 body

c) Rychlost člunu vzhledem k břehu lze zapsat pomocí složek $v = \sqrt{v_\mathrm{x}^2 + v_\mathrm{y}^2}$, kde $v_\mathrm{x} = v_0 = \text{konst.}$, $v_\mathrm{y} = at_1$. Čas t_1 odpovídá poloze člunu v obrázku, z něhož vyčteme x-ovou souřadnici $x_1 = 50$ m. Pak

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0} = \frac{50}{2}\ \mathrm{s} = 25\ \mathrm{s}.$$

Alternativně je možné z obrázku vyčíst y-ovou souřadnici $y_1 = 47$ m. Pak z rovnice

$$y_1 = \frac{1}{2}at_1^2$$

dostaneme

$$t_1 = \sqrt{\frac{2y_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 47}{0{,}15}}\mathrm{s} = 25\ \mathrm{s}.$$

Nyní dopočteme y-ovou složku rychlosti

$$v_\mathrm{y} = at_1 = 0{,}15 \cdot 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}75\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Hledaná rychlost pak je

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + v_\mathrm{y}^2} = \sqrt{2^2 + 3{,}75^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\ \left(4{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right).$$

3 body

d) Složka v_y je

$$v_{\mathrm{y}2} = \sqrt{v_2^2 - v_0^2} = \sqrt{5^2 - 2^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}58\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Dosáhne jí v čase

$$t_2 = \frac{v_{\mathrm{y}2}}{a} = \frac{4{,}58}{0{,}15}\ \mathrm{s} = 30{,}5\ \mathrm{s}.$$

Hledané souřadnice polohy pak jsou

$$x_2 = v_0 t_2 = 2 \cdot 30{,}5\ \mathrm{m} = 61\ \mathrm{m},$$
$$y_2 = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}15 \cdot 30{,}5^2\ \mathrm{m} = 70\ \mathrm{m}.$$

Pokud spočteme jednu ze souřadnic, lze výpočet zbývající souřadnice nahradit vyčtením z grafu. Případné nepožadované obecné řešení:

$$x_2 = v_0 t_2 = v_0 \frac{v_{y2}}{a} = v_0 \frac{\sqrt{v_2^2 - v_0^2}}{a} = 2 \cdot \frac{\sqrt{5^2 - 2^2}}{0{,}15}\ \mathrm{m} = 61\ \mathrm{m},$$
$$y_2 = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2}a\frac{v_{y2}^2}{a^2} = \frac{v_2^2 - v_0^2}{2a} = \frac{5^2 - 2^2}{2 \cdot 0{,}15}\ \mathrm{m} = 70\ \mathrm{m}.$$

3 body

Ještě existuje druhé řešení, a to při rovnoměrně zpomaleném pohybu:

$$x_2' = (160 - 61)\ \mathrm{m} = 99\ \mathrm{m},$$
$$y_2' = (240 - 70)\ \mathrm{m} = 170\ \mathrm{m}.$$

1 bod